القياســــات الاقتصـــــادية
فـــى
اتخـاذ الـقـرارات

أ- (تحليل النظم وإدارة الأعمال)

فى الأنشطة التالية:

١- الإنتاج الزراعى
٢- التغذية
٣- التصنيع
٤- النقل
٥- الشحن والتفريغ
٦- التسويق
٧- شبكات العمل
٨- مخاليط الزيوت المعدنية
٩- المستوى الكمى للمخزون
١٠- التمويل
١١- النواحى الإعلامية

ب - (إدارة ومتابعة تنفيذ المشروعات)

دكتور

جـــلال الـــبنا

استاذ بجامعة ماساشوتس الأمريكية

وخبير بمنظمة الأغذية والزراعة بالأمم المتحدة . روما سابقا

البنا، جلال
القياسات الاقتصادية في اتخاذ القرارات: تحليل النظم وإدارة الأعمال / جلال البنا
ط1 – الإسكندرية
توزيع المكتب العربي الحديث، [2007]
266 ص ، 25 سم

1- اتخاذ القرارات
أ. العنوان

رقم الإيداع 26620 التاريخ 2007/12/25 658.403

رقم الإيداع الدولي x – 5369 – 17–977

شركة الندى للطباعة – 2 شارع الوليد/من المعتصم/ طنطا/مصر
ت 040/3305209

المكتب العربي الحديث
30 شارع سويتر– الاسكندرية
ت 03/4846489

مقدمـــة

التحليل الكمي هو المدخل العلمى إلي إدارة القرار. ويبدأ هذا المدخل بالبيانات. وكمثل أى مادة خام، فتعالج هذه البيانات لتصبح ذات قيمة لمتخذى القرارات. وهذه المعالجة هى قلب التحليل الكمى. وقد لعبت الحاسبات الآلية دوراً هاماً فى زيادة استخدام التحليل الكمى.

وفى حل لمشكلة، فيجب على المديرين أن يأخذوا فى اعتبارهم عوامل كمية ونوعية. ويمكننا استخدام التحليل الكمى فى تحديد كم من استثماراتنا ستساوى مستقبلاً عند ايداعها فى البنك عند معدل معطى لعدد محدد من السنوات. كما يستخدم أيضاً فى حساب النسب المالية من قوائم الميزانية للعديد من الشركات موضع الاستثمار فى أوراق ماليتها. كما أن العديد من شركات العقارات الأجنبية قد طورت برامج حاسباتها لتستخدم التحليل الكمى فى تحليل التدفقات النقدية ومعدلات العائد على الاستثمار العقارى. ولأهمية العوامل النوعية، فإن دور التحليل الكمى فى عملية اتخاذ القرار يمكن أن تتباين. وعندما يكون هناك قصور شديد فى العوامل النوعية، وعند بقاء المشكلة، ونموذجها، والمدخلات على ما هى عليه، فإن نتائج التحليل الكمى يمكنها معالجة هذا الأمر. فيميكانيكية اتخاذ القرار، وعلى سبيل المثال تستخدم بعض الشركات النماذج الكمية للمخزون للتحديد التلقائى لوقت إصدار أمر شراء مواد جديدة.

والكلمات مثل الإدارة العلمية، بحوث العمليات، التحليل الكمى ما هى إلا تعبيرات تتداول لذات الهدف. فأول خطوة فى المدخل الكمى هو التعبير الواضح المحدد للمشكلة. فهى التي ستعطينا الاتجاه والمعنى للخطوات التالية. أما الخطوة الثانية فهى تشكيل نموذج. وببساطة فالنموذج ما هو إلا تعبير (غالباً رياضى) عن الموقف. والنموذج الرياضى هو مجموعة من العلاقات الرياضية. وفى معظم الحالات، فيعبر عن هذه العلاقات فى صورة معادلات أو غير متساويات. وفى هذا المرجع فمعظم النماذج تحتوى على واحد أو أكثر من المتغيرات أو معلمات **parameters**. والمتغير كما ينم عن اسمه هو كمية مقيسة والتي يمكن أن تتباين أو تتغير. وهذه المتغيرات قد يمكن التحكم فيها أو لا يمكن. والمتغير المتحكم فيه يسمى أيضاً بالمتغير القرارى، والمعلمة **parameter** هى كمية مقيسة فى صلب المشكلة. وفى معظم الحالات فالمتغيرات هى كميات غير معلومة، أما المعلمات فهى كميات معروفة. فيجب العناية بتكوين النموذج، ويكون قابلاً للحل، واقعى، سهل فهمه وتعديله، وأنه يمكن الحصول على بيانات المدخلات.

بعد ذلك يجرى الحصول على البيانات التي ستستخدم فى النموذج (المدخلات). كما أن البيانات الدقيقة هي الأساس، فحتى لو كان النموذج ممثلاً تاماً للوضع الحقيقى، فستؤدى البيانات غير المناسبة إلى نتائج عقيمة. ومن مصادر البيانات، تقارير الشركة والوثائق التى يمكن منها الحصول على البيانات

وتتضمن خطوات الحل معالجة النموذج للحصول علي أحسن الحلول (الحل المثالي). وسوف يبين لك هذا الكتاب حل المشاكل الصعبة والمعقدة بتكرار خطوات قليلة بسيطة حتى تجد أحسن الحلول، وهذه الخطوات هي ما تسمى (**algorithm**) نسبة إلي العالم الرياضى العربى ألجورتيموس من القرن التاسع الميلادى.

وقبل تحليل نتائج الحل وتضمينه فى القرار، فيجب اختباره كلية، أى اختبار دقة واكتمال بيانات النموذج لما يتوقف عليه من نتائج. وإحدى الطرق لاختبار تلك البيانات هى جمع بيانات إضافية من مصدر مختلف. فإذا كانت البيانات الأصلية جمعت من مقابلات، فلربما البيانات الإضافية تجمع عن طريق العينة أو القياسات المباشرة. أما تحليل النتائج فيبدأ بتحديد أبعاد مضامينها. ونظرا لأن النموذج ما هو إلا تقريب للحقيقة فحساسية الحل للتغيرات فى النموذج والمدخلات يكوّن جزءا هاما من تحليل النتائج، وهو ما يعرف بتحليل الحساسية.

أما المرحلة الأخيرة فهى تضمين هذه النتائج فى الشركة. وهذا قد يكون أكثر صعوبة مما يتصور بالرغم من تحقيقه لأرباح إضافية إذا عارضه المديرون، مما قد لا يكون لكل الجهود التي بذلت أي قيمة. وقد يكون ذلك لعدم تضمُّن الحل لحل عملى مناسب. وعلي أي حال، فبعض المديرين يخشون من أن استخدام العملية التحليلية المقّننة ستقلل من سلطتهم فى اتخاذ القرار. بينما آخرون يخشون من أن ذلك قد يعرِّض قراراتهم الذاتية السابقة إلي القول بأنها غير دقيقة. كما هناك البعض يحسون بعدم الارتياح فى عكس كيفية تفكيرهم أمام القرارات التحليلية المقننة. وغالبا ما يلغو هؤلاء المديرون أمام استخدام الطرق الكمية.

ولكننا نعرف منذ أمد طويل أن تعضيد الإدارة ومشاركة مستخدمى البرامج التحليلية هى من النقاط الحساسة والحرجة للتضمين الناجح للتحليل الكمى للمشروعات. فقد أظهرت دراسة سويدية أن 40% فقط من المشروعات المقترحة بواسطة المحللين الكميين هي التي أخذت فى الاعتبار ولكن 70% منها هى التي أشار بها مستخدمو البرامج، 98% من المشروعات التي اقترحها مديرو الإدارة العليا هى التى أخذ بها. فالتضمين الناجح يتطلب من المحلل الكمى ألا يطلب من مستخدمى البرامج ما يجب عمله، ولكن أن يعمل معهم ويأخذ أحاسيسهم فى الحسبان.

والله ولى التوفيق ،،،

دكتور

جلال البنا

الباب الأول

البرمجة الخطية

Linear Programming (LP)

تمهيد

تتضمن معظم القرارات الإدارية محاولة الاستخدام الأكثر كفاءة لموارد المؤسسة. وتتضمن تلك الموارد، الآلات، العمالة، الأموال، الوقت، مكان للمخزن أو المواد الخام. وهذه الموارد يمكن أن تستخدم لإنتاج نواتج (مثل آلات، أثاث، ...... إلخ) أو خدمات (مثل جداول الشحن والإنتاج، السياسات الإعلامية أو القرارات الاستثمارية). والبرمجة الخطية هي أسلوب رياضي مصمم لمساعدة المديرين في التخطيط واتخاذ القرارات فيما يختص بتوجيه الموارد. وفي عالم التحليل الكمي، فتشير البرمجة إلي عمل النموذج وحل المشكلة رياضياً. وقد لعبت برامج الحاسب الآلي دوراً هاماً في تقدم واستخدام البرامج الخطية.

متطلبات مشكلة البرنامج الخطي

لمشاكل البرنامج الخطي أربع خصائص:

أولاً: تبحث كل المشاكل الخاصة بذلك في تعظيم أو تدنية بعض الكم، عادة ما يكون ربحاً أو تكلفة. ونشير إلى هذه الخاصية كدالة الهدف لمشكلة البرنامج الخطي. وعلي كل، فيجب أن تعرض هذه الدالة بوضوح ويُعبَّر عنها رياضيا بصرف النظر عن معايير تقييمها بالقرش أو الجنيه أو آلاف الجنيهات.

ثانياً: وجود خاصية عامة وهي القيود **Restrictions or Constraints** التي تحد من درجة تحقيق دالة الهدف. فعلي سبيل المثال فإن تقرير عدد الوحدات المنتجة مقيد بالمتاح من العملات والآلات. كما أن اختيار سياسة إعلانية أو تشكيل محفظة مالية تحددها كمية الأموال المتاحة للصرف منها أو لاستثمارها، ولذلك، فإن تعظيم الدالة أو تدنيتها يكون خاضعاً للموارد المحدودة (القيود).

ثالثاً: يجب أن يكون هناك أساليب بديلة للاختيار من بينها. فعلى سبيل المثال، إذا كانت شركة ما تنتج ثلاثة أنواع من المنتجات، فالإدارة قد تستخدم البرنامج الخطى لتقرر كيفية التوزيع بينهم لموارد الإنتاج المحدودة (من العمالة والآلات ...... الخ). فهل ستوجه كل طاقتها الإنتاجية لإنتاج الناتج الأول، أو لإنتاج كميات متساوية من كل؟ فإذا لم تتواجد الاستخدامات البديلة للاختيار من بينها فلن نحتاج إلى البرنامج الخطى.

وأخيراً: فيجب أن يُعبَّر عن الدالة والقيود فى البرنامج الخطى فى صورة معادلات خطية أو غير المتساويات **Inequalities**، بمعني أن تكون جميع العلاقات الرياضية من الدرجة الأولى (ليست تربيعية أو من الدرجة الثالثة أو أعلى من ذلك، أو ظهورها أكثر من مرة). أى أن المعادلة 2أ + 5ب = 10 هى

دالـة خطية مقبولة. أما المعادلة من النوع $٢أ^٢ + ٥ب^٣ + ٣أب = ١٠$ فهي غير خطية لأن المتغير "أ" ذو قـوة تربيعـية، "ب" ذي قـوة تكعيبـية، وأن المتغيريـن يظهـران ثانـية كـناتج مـن الآخـر. ونقصـد بغـير المتسـاويات أنـه ليست كل القيود مـن النـوع أ + ب = جـ. فتلك العلاقة تسمى معادلة وتعنى أن الرمز "أ" مضـافاً إليـه الرمـز "ب" يسـاويان بالضـبط الرمـز "جـ". وفـى معظـم مشـاكل البـرامج الخطية سنرى غير المتسـاويات مـن الشـكل أ + ب ≥ جـ أو أ + ب ≤ جـ، فـالأولى تعنـى أن مجمـوع "أ، ب" أقل أو تسـاوى "جـ"، والثانية تعنى أن مجموع "أ، ب" أكبر من أو تساوى "جـ". ويزودنا هذا المفهوم بكثير من المرونة فى تعريف قيود المشكلة.

الفروض الأساسية للبرنـامج الخطى:

من الناحية التطبيقية هناك خمس متطلبات إضـافية لمشكلة البرنـامج الخطى علينا أن نلم بها:

١- **التأكد Certainty**: يفترض أن شروط التأكد موجودة، بمعنى أن الأرقـام فى دالة الهدف والقيود معروفة، ولا تغير أثناء فترة الدراسة.

٢- **التناسب Proportionality**: يفترض وجودها فـى دالـة الهـدف والقيود، بمعنى أنـه إذا كان إنتاج وحدة واحدة يحتاج ثلاث ساعات من المورد الخاص المحدود، فإنه لإنتاج ١٠ وحدات سيستخدم ثلاثين ساعة من هذا المورد.

٣- **الإضافة additivity**: بمعنى أن مجموع الأنشطة تساوى مجموع كل نشاط. فعلى سبيل المثال، إذا كـان هدف الدالـة هو تعظيم الربح = ٨ جنيهات للوحدة من الناتج الأول مضافاً إليها ٣ جنيهات للوحدة من الناتج الثانى. فإذا أنتجت فعلياً وحدة من كل، فإن إجمالى مساهمات الربح ٨ جنيها + ٣ جنيهات يجب أن ينتج عنه ما قيمته ١١ جنيهاً.

٤- **التجزئة Divisibility**: بمعنى أن الحلول لا تحتاج لأن تكون فى صـورة أعداد كاملة Integer. فبدلاً من ذلك، فإنهم يجزأون، وقد يكونون قيماً كسرية، فإذا كان هذا الكسر لا يمكن إنتاجه (٣\١ غواصة) فيستخدم البرنامج المتكامل Integer Program.

٥- **عدم سلبية القيم Nonnegativity**: أى نفترض أن كل الأجوبة والمتغيرات ليست قيمتها سالبة، إذ من المستحيل وجود حـالات من الكميات الفيزيقية لهـا قيم سالبة. فلا يستطاع ببساطة إنتاج عدد سالب من الكراسى، والقمصان ..... الخ.

تطبيقات البرمجة الخطية
والــمــخــلــوط الأمــثــل لــلــمــنــتــجـــات

يهدف هذا الباب إلى البدء بالمشكلات البسيطة، ومن خلال التعديل والتوسع والتدقيق، تتطور إلى مشكلات معقدة من النوع الذى يجابهه الفرد فى الحياة الواقعية.

من ذلك ننظر إلى حالة المزارع الذى لديه ٥٠ فداناً من الأرض الزراعية، ١٢٠ ساعة من العمل ولنفترض أن لديه محصولان قادر على إنتاجهما أما ذرة أو فول صويا. و يبين الجدول (١-١) المعلومات المتعلقة بإنتاج الذرة وفول الصويا.

جدول (١-١) الإمكانيات المتاحة للإنتاج

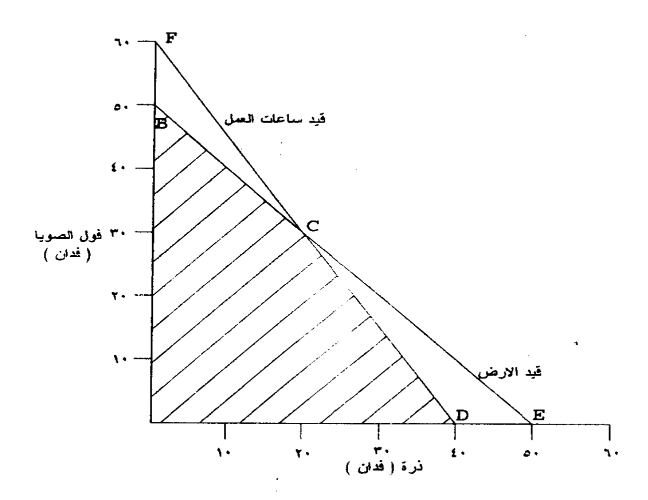
فدان واحد من الذرة	فدان واحد من فول الصويا
يستخدم فدان من الأرض الزراعية	يستخدم فدان من الأرض الزراعية
يستخدم ٣ ساعات عمالة	يستخدم ٢ ساعة عمالة
التكلفة النقدية ٣٥,٥ دولار	التكلفة النقدية ٢٢ دولار
غلة الفدان ٧٥ بوشل ذرة	غلة الفدان ٣٠ بوشل فول الصويا
سعر البيع ١,٢٢ دولار \ بوشل	سعر البيع ٢,٣٠ دولار \ بوشل
إجمالي إيراد ٧٥×١,٢٢ = ٩١,٥ دولار \ فدان	إجمالي إيراد =٣٠× ٢,٣٠= ٦٩ دولار \ فدان
صافى الإيراد ٩١,٥ـ ٣٥,٥= ٥٦ دولار \ فدان	صافى إيراد = ٦٩ ـ ٢٢ = ٤٧ دولار \ فدان

الحلول البيانية

المشكلة من الصغر بحيث تمكننا من اختبار كل حل ممكن والوصول إلى أكثرها ربحية. والشكل البيانى(١-١) يعطينا صورة مباشرة من الحلول البديلة. ففى هذا الرسم تتواجد مساحات الذرة على المحور الأفقى ومساحات فول الصويا على المحور الرأسى. وقد رسم خط لكل الإمكانيات من إنتاج الذرة وفول الصويا على أساس الأرض المتاحة، بمعنى أنه إذا وضع المزارع كل أرضه فى إنتاج الذرة فسينتج ٥٠ فداناً من الذرة، أما إذا وضعها فى إنتاج فول الصويا فالمساحة ستكون ٥٠ فداناً أيضاً. والخط الذي يصل النقاط (E-B) فى الشكل (١-١) يبين كل الإمكانيات من إنتاج الذرة وفول الصويا التى ستشغل ٥٠ فداناً متاحة للمزارع. وكل النقاط على هذا الخط تبين الاستفادة الكاملة من الأرض، وأن جميع النقاط على يسار وأسفل هذا الخط تبين استخداماً أقل للأرض المتاحة، أى وجود جزء لا يستفاد من زراعته (بور). والآن نرسم خطاً ثانياً يمثل الإمكانيات المتاحة لساعات العمل وهى ثلاث ساعات

لفدان الذرة. فإذا وجّه المزارع كل مجهوده لإنتاج الذرة فالنتيجة ٤٠ فدان ذرة، أى ١٢٠ ساعة متاحة مقسومة على عدد الساعات للفدان: ١٢٠ ساعة ÷ ٣ ساعة\ فدان الذرة = ٤٠ فدان ذرة.

شكل (١-١) إمكانيات إنتاج الذرة وفول الصويا



ومن ناحية أخرى فإذا وجهت مجهودات المزارع إلى إنتاج فول الصويا فالنتيجة ٦٠ فدانا بحد أقصى (١٢٠ ساعة ÷ ٢ ساعة\ فول صويا = ٦٠ فدان صويا) وهاتان المعادلتان السالفتان تصوران الحاجة إلى إظهار هذه الحدود. والخط الذى يصل بين النقطتين(F,D) شكل (١-١) يبين كل الإمكانيات من إنتاج الذرة وفول الصويا التى ستستغل ١٢٠ ساعة عمل متاح للمزارع. وكما هو الحال فجميع النقاط على يسار وأسفل هذا الخط تبين استخدام أقل للساعات المتاحة. فعلى سبيل المثال إذا زادت مساحة أرض الذرة إلى ٤٠ فدان فإنه مازال لديه ١٠ أفدنة فى حالة بور، ومن ناحية أخرى فيمكن الوصول إلى زراعة ٥٠ فدان من فول الصويا كحد أقصى ولكن لديه ساعات عمل غير مستغلة (٢٠ ساعة)

ويقودنا هذا الموقف إلى التساؤل عن إمكانية إنتاج المحصولين باستخدام الموارد المتاحة من الأرض وساعات العمل (أى الاستخدام الكامل للموارد)، وقد لا تكون نقطة ذاك التلاقى هى تعظيم الربح Profit maximization ولو أنها من ذات الأهمية. ومن هذا الشكل البيانى فقد اتضح أربع أركان للحل تتتابع فى اتجاه عقارب الساعة حيث تبدأ من الأصل ثم المحور الرأسى حتى نقطة ٥٠ فدان من فول

الصويا، ثم تنحدر على الحدود المظللة المحددة بقيد الأرض حتى نقطة تقاطع قيود الأرض وساعات العمل (نقطة C)، ثم تستمر على الحدود المقيدة لساعات العمل حتى نصل إلى نقطة ٤٠ فدان من الذرة، وحينئذ تتقابل مع المحور الأفقي. وهذه المنطقة المظللة هى منطقة الإنتاج الممكن والتي تشير إلى التوليفات من إنتاج الذرة وفول الصويا والأرض البور وساعات العمل غير المستخدمة، وتحددها النقاط A,B,C,D والتى يظهرها الجدول التالى مع حساب الربح عند كل نقطة.

جدول (١-٢) حساب الربح عند أركان المنطقة الإنتاجية المتاحة

النقطة	الذرة (فدان)	فول الصويا (فدان)	ارض بور (فدان)	ساعات العمل الغير مستخدمة	الربح بالدولار
A	صفر	صفر	٥٠	١٢٠	صفر
B	صفر	٥٠	صفر	٢٠	٢٣٥٠
C	٢٠	٣٠	صفر	صفر	٢٥٣٠
D	٤٠	صفر	١٠	صفر	٢٢٤٠

ويتضح من الجدول (١-٢) أن النقطة C هى نقطة أقصى ربح مُحقق. وكطريقة أخرى للنظر إلى تعظيم الربح فإننا سنعتبر حداً جديداً وفيه يتساوى الإيراد لكل من الذرة وفول الصويا، أى أن هذا الحد (الخط) الجديد تقع عليه كل النقاط التى تعطى نفس الربح كالآتى :

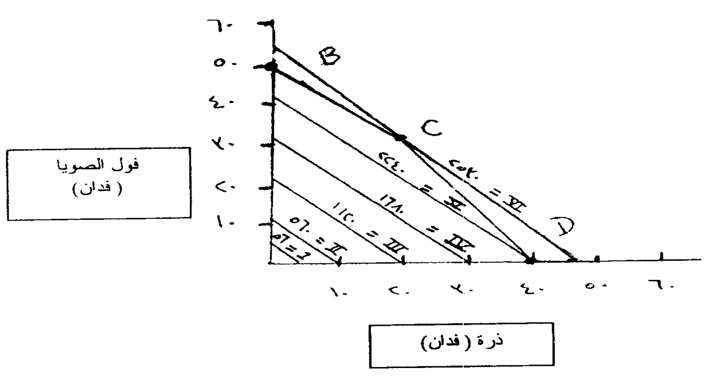
من الفرض فإن فدان الذرة حقق ربحاً قدره ٥٦ دولار، وللحصول على ربح بهذا القدر من إنتاج فول الصويا سنحتاج إلى ١,١٩ فدان من فول الصويا كالتالى:

$$\frac{\text{٥٦ دولار}}{\text{٤٧ دولار\ فدان فول صويا}} = \text{١,١٩١٥ فدان فول صويا.}$$

وفى كلمات أخرى فإن خطاً يصل نقطة إنتاج فدان من الذرة مع ١,١٩ فدان من فول الصويا سيظهر جميع الإمكانيات لإنتاج كل من الذرة وفول الصويا محققاً ربحاً قدره ٥٦ دولار بالضبط. ويربط خط آخر بين نقطة من ١٠ فدان ذرة مع ١١,٩٢ فدان فول صويا مشيراً إلى جميع الإمكانيات لإنتاجهما وتحقيق ربح قدره ٥٦٠ دولار بالتمام. وتسمى هذه الخطوط بمنحنيات الإيراد المتشابهة **(Iso-Revenue)** والتي ستمر بجميع الأركان الأربعة المذكورة سابقاً. و أعلى خط منها داخل منطقة الإنتاج الممكنة **(Feasible region)** يمر على أحد النقاط الأربعة، وهى نقطة C التي يتحقق عندها أكبر ربح، أى زراعة ٣٠ فدان من فول الصويا و ٢٠ فدان من الذرة وتحقق ربحاً قدره ٢٥٣٠ دولار (شكل١-٢).

وهنا سيتحقق القارئ من الاحتياج إلى بدائل للحلول إذا كان لدينا أكثر من متغيرين وليكن ذرة، فول صويا، قمح. وفى هذا المجال سنتعرض لأسلوب السمبلكس Simplex ويتلخص هذا الأسلوب فى حل مشاكل البرمجة الخطية.

شكل (١-٢) منحنيات الإيراد المتشابهة I
وتطبيقها على منطقة الإنتاج الممكنة



. استخدام أسلوب السمبلكس Simplex فى حل المشاكل
التى لها قيود من ذات الحدود القصوى

يمدنا السمبلكس بما قد نقابله فى واقع الحياة من البرمجة الخطية التى تحتوى علي أكثر من متغيرين لا يمكن معها من حلها بيانيا، أي من خلال المحور السينى والمحور الصادى فقط، مما تدعو الحاجة معه إلى استخدام أسلوب السمبلكس.

كيف يعمل أسلوب السمبلكس؟

الفكرة بسيطة ومشابهة للبرنامج الخطي البياني. ففيه اختبرنا كل نقط الزوايا، حيث ترشدنا نظرية البرنامج الخطى أن الحل الأمثل يقع عند أحد تلك النقاط. وهذه النقاط تحدد مساحة للحلول الممكنة، وحيث تختبر نقط الزوايا بطريقة متسلسلة قواعد جبرية أساسية بأسلوب القريب iterative بمعنى إعادة مجموعة الخطوات مرة بعد أخرى حتى الوصول إلى الحل الأمثل. وكل عملية حذف وإضافة ينتج عنها قيمة لدالة الهدف

(Objective function) وبذلك نقترب دائما من الحل الأمثل. وبالإضافة إلى الأسباب السابقة لاستخدام هذا الأسلوب سواء لتعظيم الربح (أو تدنية التكلفة) فإننا نتحصل على معلومات اقتصادية قيّمة.

كيفية إعداد الحل المبدئي لأسلوب السمبلكس

نفترض المثال التالى لبيان كيفية أداء السمبلكس: (باستخدام تعظيم الربح)

X_1 = عدد المناضد المنتجة.

X_2 = عدد الكراسى المنتجة.

- **Maximize Profit** (تعظيم الربح):	$= £\,7\,X_1 + £\,5\,X_2$	**Objective function**
- **Subject to:**	$2\,X_1 + 1X_2 \le 100$	عدد ساعات الدهان (محدد)
فى ظل القيود	$4\,X_1 + 3X_2 \le 240$	عدد ساعات النجارة (محدد)
	$X_1 , X_2 \ge 0$	محددات غير سالبة

تحويل القيود إلي معادلات Equations

تتطلب الخطوة الأولى تحويل كل قيد متساوى فى محتوى البرنامج الخطى إلى معادلة، فالقيود التى بها أقل من (≤) تُحوّل إلي معادلات متساوية بإضافة متغير زائد **Slack variable** إلى كل قيد. وتمثل هذه المتغيرات الزائدية موارد غير مستغلة، قد تكون فى صورة زمنية لاستخدام الآلة، عدد ساعات العمل، نقود، مساحة مخزنية، أو أى عدد من مثل هذه المصادر فى مختلف مشاكل الأعمال.

فى حالتنا سنستخدم الآتى:

S_1 = المتغير الزائد ويمثل ساعات العمل الغير مستغلة فى عملية الدهان.

S_2 = المتغير الزائد ويمثل ساعات العمل الغير مستغلة فى عملية النجارة.

ويمكننا الآن إعادة كتابة المحددات كالآتى، وحيث يأخذ المتغير الزائد علامة موجبة:

$$2\,X_1 + 1\,X_2 + S_1 = 100$$
$$4\,X_1 + 3\,X_2 + S_2 = 240$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \ge 0$$

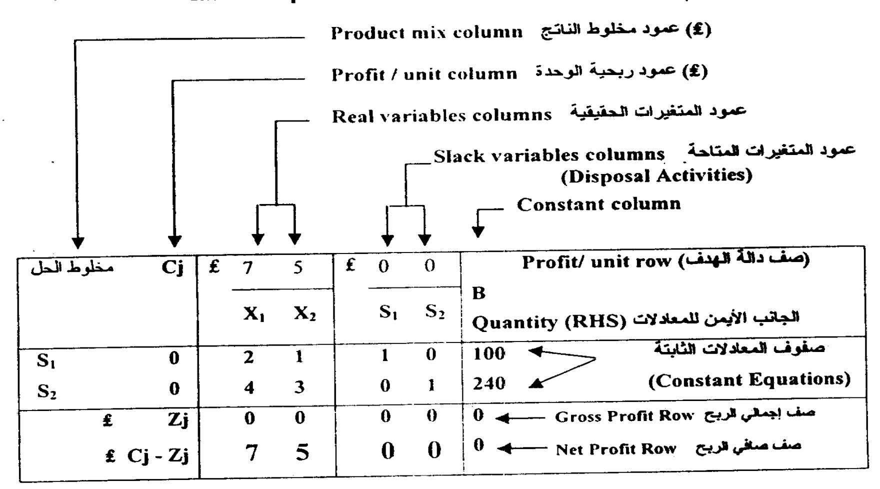
وتعرض المشكلة فى صورة جدول **tableau** كالآتى:

Objective Function:

- **Maximize** ∏ (تعظيم الربح) :	$7\,X_1 + 5\,X_2 + 0S_1 + 0S_2$	
- **Subject to:**	$2\,X_1 + 1X_2 + 1S_1 + 0\,S_2$	$=100$ .... (1)
فى ظل القيود	$4\,X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 1S_2$	$=240$ .... (2)
	$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \ge 0$	

وحيث الرمز (∏) معناه الربح.

وتعرض هذه البيانات كالآتى فى صورة جدول مبدئى **Initial Simplex Tableau**



مخلوط الحل	Cj	£ 7	5	£ 0	0	Profit/ unit row (صف دالة الهدف)
		X_1	X_2	S_1	S_2	B Quantity (RHS) الجانب الأيمن للمعادلات
S_1	0	2	1	1	0	100
S_2	0	4	3	0	1	240
£	Zj	0	0	0	0	0
£	Cj - Zj	7	5	0	0	0

ويبدأ الحل الابتدائى عند الأصل حيث $X_1=0.$, $X_2=0.$ ، أما القيم للمتغيرات الأخرى فهى غير صفرية حيث $S_1= 100$, $S_2= 240$ ، وهما يكونان المتغيرات الزائدة حيث يمثلان الحل الابتدائى Solution Mix ، وتظهر تلك القيم في العمود الأيمن من الجدول (RHS) وحيث أن X_1، X_2 لا يتواجدان في مخلوط الحل فقيمتهما الابتدائية تساويان صفرا. هذا ويسمى الحل الابتدائى Basic feasible Solution ويوصف فى صورة فيكتور Vector أو عمود مصفوفة كالآتى :

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{vmatrix}$$

وتسمى المتغيرات فى مخلوط الحل بالمتغيرات الرئيسية Basic Variables وهما S_2,S_1، أما المتغيرات الغير موجودة فى مخلوط الحل أو Basis فتسمى متغيرات غير رئيسية Non-Basic Variables وهما X_1، X_2 . وبالطبع فإذا كان الحل الأمثل لمشكلة البرنامج الخطى هو:

$$S_2= 0\ ,\ S_1=0\ ,\ X_2= 40\ ,\ X_1=30$$

أى:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

وفى هذه الحالة فإن X_1، X_2 سيكونان في متغيرات الحل الأساسى النهائى Final Basic Variables بينما S_1، S_2 سيكونان متغيرات غير الحل الأساسى Non- Basic Variables.

معدلات الإحلال Substitution Rates

نعلم أن الأرقام فى الأعمدة تحت كل متغير هي معاملات Coefficients لهذا المتغير. فتحت X_1 نجد المعاملات $\binom{2}{4}$ وتحت X_2 نجد $\binom{1}{3}$ وتحت S_1 نجد $\binom{1}{0}$ وتحت S_2 نجد $\binom{0}{1}$ ، وهذه المعاملات ما هى إلا معدلات إحلال. فعلى سبيل المثال نفترض أن هناك رغبة لنجعل X_1 أكبر من الصفر، أى لانتاج بعض من المناضد. فلكل وحدة ناتج من X_1 تدخل فى الحل الجارى، فإن ٢ وحدة من S_1، ٤ وحدات من S_2 يجب أن تترك الحل. وهذا ببساطة لأن كل وحدة من المناضد تحتاج ٢ ساعة من عدد الساعات الكلية الغير مستغلة S_1 من وقت الدهان ، كما تحتاج إلى ٤ ساعات من وقت النجارة ، وبالتالى يجب أن تترك ٤ وحدات من S_2 الحل لكل وحدة تدخل الحل من X_1، وهكذا بالنسبة لـ X_2 .

وجدير بالذكر أن لكل متغير يظهر فى عمود مخلوط الحل يجب أن يكون هناك الرقم 1 فى مكانه فى عموده وصفر فى كل مكان آخر فى هذا العمود. إذ نرى فى الجدول السابق أن عمود S_1 يحوي $\binom{1}{0}$ لذلك فالمتغير S_1 يظهر فى مخلوط الحل ، وهكذا بالنسبة S_2 حيث يحوى $\binom{0}{1}$.

إضافة دالة الهدف The Objective Function

ونسمى معدلات المساهمة لهذه الدالة بـ C_j حيث تظهر فى الصف العلوى أعلى كل متغير . كما تظهر أيضا معدلات الربح للوحدة فى آخر عمود من اليسار ، حيث C_j تبين ربحية الوحدة لكل متغير موجود حاليا فى الحل . فإذا أزيلت S_1 من الحل ويحل محلها X_1 فحينئذ 7 £ ستظهر فى العمود C_j إلى يمين X_1 .

صفوف Z_j، $(C_j - Z_j)$

ويمدنا هذا الصفان بمعلومات اقتصادية هامة تتضمن الربح الكلى ، وإجابة على التساؤل عما إذا كان الحل الجارى هو الأمثل.وهنا نحسب قيمة Z_j لكل عمود من الحل المبدئى بضرب مساهمة الربح

وقدرها صفر لكل رقم من عمود C_j فى كل رقم فى هذا الصف والعمود المرادف J^{th} وجمعهم.
وتمدنا القيمة Z_j لعمود الكمية (RHS) بإجمالى الربح (Gross Profit فى حالتنا هذه) للحل المشار إليه.

Z_j **(for gross Profit)** =(Profit / Unit of S_1) x Number of Units of S_1
+ (Profit / Unit of S_2) x Number of Units of S_2
= £ 0. x 100 Units + £ 0. x 240 Units
= £ 0. Profit

وتمثل قيمZj للأعمدة الأخرى (تحت المتغيرات S_2,S_1,X_2,X_1) **إجمالى الربح Gross Profit الناجم من إضافة وحدة واحدة من هذا المتغير فى الحل الجارى وتظهر نتائج هذه العملية كالآتي :**

Z_1 **(X_1 للعمود)** = (£ 0) (2) + (£ 0) (4) = **£ 0**
Z_2 **(X_2 للعمود)** = (£ 0) (1) + (£ 0) (3) = **£ 0**
Z_3 **(S_1 للعمود)** = (£ 0) (1) + (£ 0) (0) = **£ 0**
Z_4 **(S_2 للعمود)** = (£ 0) (0) + (£ 0) (1) = **£ 0**

ونرى أنه لا يوجد ربح مفقود بإضافة وحدة من كل X_1 (مناضد) وX_2 (كراسى)، S_2,S_1 . **ويمثل الرقم ($C_j - Z_j$)** لكل عمود كصافى الربح، أى الربح المكتسب مطروحاً **منه الربح المزاح جانباً، وينتج ذلك من إدخال وحدة واحدة من كل ناتج أو** متغير فى الحل، **وهو لا يحسب من عمود الكمية.**

ولحساب هذه الأرقام، تطرح القيمة الكلية للعمودZ_j من قيمة C_j **الموجودة فى قمة عمود المتغيرات لتعطينا فى النهاية** صافى الربح كالآتى:

			X_1	X_2	S_1	S_2
C_j	للعمود	£	7	5	0	0
Z_j	للعمود	£	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	للعمود	£	7	5	0	0

ومن الواضح أن الربح بالقيمة صفر جنيه (£) فى الحل المبدئى لم يكن **الأمثل .وبفحص الأرقام** فى صف ($C_j - Z_j$) من الجدول المبدئى نجد أن إجمالى الدخل كان يجب أن يزداد بمقدار ٧ جنيهات لكل وحدة من X_1 و ٥جنيهات لكل وحدة من X_2 تضاف إلى مخلوط الحل. فالرقم السالب فى الصف

(C_j-Z_j) سيدلنا على أن الأرباح ستقل إذا أضيفت المتغيرات المقابلة فى مخلوط الحل. وسنصل إلى الحل الأمثل عندما يكون صف(C_j - Z_j) يحتوى على أرقام غير موجبة، وهذه الحالة لا تتواجد فى الحل المبدئى.

خطوات إجراء السمبلكس Simplex

بعد استكمال شكل الجدول سنبدأ بمسلسل من خمس خطوات لحساب جميع الأرقام اللازمة للجدول التالى.

الخطوة الأولى: وتتعلق بالمتغيرات الداخلة إلى مخلوط الناتج التالى. وللوصول إلى ذلك نتعرف على العمود وبالتالى المتغير الذى له أكبر قيمة موجبة فى صف C_j-Z_j (الربح الصافى من الجدول السابق). ويعني ذلك حالياً إنتاج جزء من المخلوط الذى سيسهم فى أكبر إضافة ربحية للوحدة، ويسمى هذا العمود المتعرف عليه بالعمود المحورى **pivot column**.

الخطوة الثانية: وتتعلق بالمتغيرات الخارجة، أى تحديد المتغير الذى سيحدث به الإحلال. ولما كنا قد اخترنا المتغير الجديد الداخل فى مخلوط الحل، فيجب أن نقرر أى من المتغيرات الحالية الأصلية (Basic Variables) سيخرج للإحلال محله. وفى هذه الخطوة يجري قسمة كل كمية فى عمود الكميات (B) RHS بالعدد المقابل من وحدات عنصر a_{ij} للعمود المختار فى الخطوة السابقة $\left(b_i = Q / a_{ij}\right)$ وسيكون الصف الذى نتيجته أصغر الأعداد الغير سالبة وغير صفرى هو الذى سيجرى إحلاله فى الجدول التالى (وأصغر نتيجة رقم بهذه الطريقة تعطينا أقصى عدد من وحدات المتغير الذي سيدخل فى مكونات الحل، أكثر الصفوف حدية (Limiting Factor) ويسمى هذا الصف بالمحورى (Pivot row)، وتقاطع الصف والعمود المحورى يعطينا الرقم المحورى.

الخطوة الثالثة : وتتعلق بإيجاد صف محورى جديد. وللحصول على ذلك يقسم كل رقم فى الصف المحورى على الرقم المحورى.

الخطوة الربعة: وتتعلق بالصفوف الأخرى الجديدة. وفيها تحسب القيم الجديدة لكل من الصفوف الباقية (وفى حالتنا هناك صفان فى جدول البرنامج الخطى ولكن المشاكل الكبرى تحتوى على عدد أكبر من الصفوف). وتحسب كل الصفوف المتبقية كالآتى:

قيم الصف الجديدة = قيم الصف القديم – (الرقم الذى أعلى أو أسفل الرقم المحورى × الرقم المقابل فى الصف الجديد (أى الصف الذى حدث به الإحلال فى الخطوة الثالثة)

الخطوة الخامسة: وتتعلق بصفوف Z_j ، $(C_j - Z_j)$

تحسب قيم صفوف Z_j ، $(C_j - Z_j)$ كما سبق إجراؤها فى الجدول المبدئى. فإذا كانت كل الأرقام فى الصف $(C_j - Z_j)$ تساوي صفراً أو بالسالب فنكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وإلا فنرجع إلى الخطوة الأولى من جديد.

الجدول الثانى للسمبلكس يصبح كالآتى فى مثالنا:

(١) المتغير X_1 يدخل مخلوط الحل، ويخرج S_1 فى ضوء تحديد الصف والعمود والرقم المحورى، وتحسب قيم b_j كما يظهر من الجدول التالى بقسمة كمية المورد المتاح (Q) على مكافئ المورد فى العمود المحورى.

(جدول ١-٣) تحديد الصف والعمود والرقم المحورى فى الجدول المبدئى

Solution Mix	Cj →	7	5	0	0	Quantity	$bj = \frac{Q}{aij}$
	↓	X1	X2	S1	S2	Q	
S1	0	(2)	1	1	0	100	$b_1 = 100/2 = 50$ ←
S2	0	4	3	0	1	240	$b_2 = 240/4 = 60$
	£ Zj	0	0	0	0	£ 0	
	Cj – Zj	£ 7	5	0	0		

العمود المحورى — الرقم المحورى — الصف المحورى

وأقل قيمة من هذه النسب b_j (٥٠) تبين لنا أعلى رقم من وحدات X_1 يمكن إنتاجها بدون مخالفة أي من القيود الأصلية. وتبين أيضاً أن الصف المحورى سيكون هو الصف الاول ، بمعنى أن S_1 ستكون المتغير الذى سيحدث له إحلال فى خطوات الحل . والرقم المحورى هو تقاطع الصف والعمود المحوريين.

وينتج الرقم ٥٠ منضده فى الصف الأول (S_1) من = (١٠٠ ساعة دهان متاحة) / (٢ ساعة لازمة لكل منضدة)

وينتج الرقم ٦٠ كرسى فى الصف الثاني (S_2) من = (٢٤٠ ساعة نجارة متاحة) / (٤ ساعات لازمة لكل كرسى)

ملاحظة : إذا كانت القيمة b_j سالبة فلا تستخدم ، فاستخدامها معناه أن العمود المختار لن يستخدم العنصر بل سيضيف إليه وبالتالى ينتفى عمل القيد.

(٢) نبدأ فى تطوير الجدول بإيجاد بديل للصف المحورى ، وذلك بقسمة كل رقم فى الصف المحورى على الرقم المحورى ليصبح هذا الصف كالآتى:

مخلوط الحل	C_j	X_1	X_2	S_1	S_2	الكمية
X_1	£ 7	2/2=1	1/2= 1/2	1/2=1/2	0/2=0	100/ 2=50

(٣) والخطوة السابقة ستساعدنا فى حساب القيم الجديدة التالية للصفوف الأخرى فى الجدول وهى صف S_2 لتكون كالآتى:

مخلوط الحل	C_j	X_1	X_2	S_1	S_2	الكمية
X_1	£ 7	1	1/2	1/2	0	50
S_2	£ 0	0	1	-2	1	(-4x50) + 240 = 40

وهنا نجد أن S_2,X_1 فى الحل ، وبالنظر إلى معاملاتهم من خلال أعمدتهم فإن عمود X_1 يحتوى على $\binom{1}{0}$ وهو شرط ضرورى لدخول المتغير فى الحل بينما عمود S_2 يحتوى على $\binom{0}{1}$ أى به صفر وواحد، أى أننا فى عمليات التقريب **iterations** المتتالية هى لإنتاج أصفار وآحاد فى الأماكن المناسبة. ففى الخطوة الثانية حصلنا على 1 فى الصف الأول من عمود X_1 . وللحصول على الصف الثانى الجديد ضربنا الصف الأول (كل صف هو أصلاً معادلة) فى رقم ثابت (٤ فى حالتنا) ثم طرحنا النتيجة من الصف الثانى، والنتيجة هى صف S_2 الجديد وبه صفر فى عمود X_1 .

(٤) والخطوة الأخيرة من التقريب Iteration الثانى هى لمعرفة أثر ذلك على دالة الهدف. وهذا يتضمن حساب Z_j ، $(C_j \ -Z_j)$. فبحساب دخول Z_j لعمود الكميات يعطينا الربح الاجمالى للحل الحالى . كما تعطينا القيم الاخرى لـ Z_j إجمالى الربح بإضافة وحدة واحدة من كل متغير فى الحل الجديد كالآتى:

Z_j (عمود X_1) = (£7) (1) + (£ 0.) (0) = £ 7

Z_j (عمود X_2) = (£7) (1\2) + (£ 0.) (1) = £ 7/2

Z_j (عمود S_1) = (£7) (1\2) + (£ 0.) (-2) = £ 7/2

Z_j (عمود S_2) = (£7) (0) + (£ 0.) (1) = £ 0.

Z_j (عمودالربح الكلى) = (£7) (50) +(£ 0.) (40) = £ 350

ويلاحظ أن الربح الحالى قدره ٣٥٠ جنيها. وتمثل$(C_j - Z_j)$ الربح الصافى باستخدامنا المخلوط الحالى عند إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل. ويظهر جدول السمبلكس فى نهاية تلك الخطوة كالآتى:

(جدول ١-٤) جدول إحدى الخطوات حل للسمبلكس

Solution Mix	Cj → ↓	£ 7	£ 5	£ 0	£ 0	Quantity	$bj = \frac{Q}{aij}$
		X_1	X_2	S_1	S_2		
X_1	7	1	½	½	0	50	50 ÷1/2=100
S_2	0	0	(1)	-2	1	40	40 ÷ 1=40
	Z_j	£ 7	£ 7/2	£ 7/2	£ 0	(£7×50+£0×40) = £ 350	
	$C_j - Z_j$	£ 0	£ 3/2	-£ 7/2	£ 0		

العمود المحورى — الرقم المحورى — الصف المحورى

معلومات عن الموارد:

نشاهد فى الجدول السابق أن المتغير S_2 الزائد Slack **يمثل ساعات غير مستخدمة فى عملية النجارة ويظهر فى** المتغيرات القاعدية Basic، بقيمة ٤٠ ساعة **بمعنى أنها متاحة للاستخدام**. والمتغير S_1 **هو** Nonbasic وله قيمة الصفر من الساعات، أى **لا يوجد وقت غير مستخدم فى عملية الدهان**.

معنى معدلات الإحلال

سبق الذكر أن معدلات الإحلال هى المعاملات الموجودة **فى صلب الجدول**. وبالنظر إلى عمود X_2 نجد أنه إذا أضيفت وحدة من X_2 (الكراسى) إلى الحل الحالى **فإنه يستغنى عن ١\٢ وحدة من** X_1 **ووحدة واحدة من** S_2 . وهذا يحدث لأن الحل X_1 = ٥٠ **منضدة تستخدم كل ال ١٠٠ ساعة من الوقت المخصص للدهان**. (القيد الأصلى يفيدنا بأن $2X_1+1X_2+S_1=100$). ولاستخلاص ساعة زمنية من ساعات الدهان التى نحتاجها لعمل كرسى واحد فإنه سينتج ١\٢ وحدة من الكراسى.

ومعدل الإحلال الموجب يدلنا على انه إذا أضيفت وحدة من عمود المتغير إلى الحل فإن صف المتغير سيقل بقدر هذا المعدل، وبالتالى فإن معدل الإحلال السالب معناه أنه إذا أضيفت وحدة من عمود المتغير إلى الحل فإن قيمة متغير الحل المرافق لذلك (أو لصف) ستزداد.

صف صافى الربح

وهل معنى ذلك أن هذا الحل هو الامثل؟ ترجع أهمية صف (C_j-Z_J) إلى سببين :**أولاً**: أنه يبين عما إذا كان الحل الحالى هو الامثل من عدمه. فحينما لاتكون هناك أرقام غير موجبة فى الصف السفلى

فمعنى ذلك وصولنا إلى الحل الامثل، ومن هنا فإن القيمة(C_j-Z_j) للمتغير X_2=٣ \ ٢ معناها أن صافى الدخل يمكن زيادته بمبلغ ١,٥ جنيه(=٢\٣) لكل كرسى واحد يضاف إلى الحل الحالى. هذا و لأن القيمة (C_j-Z_j)للمتغير X_1 هى صفر لكل وحدة تضاف من X_1 فإن الربح الكلى سيبقى بلا تغير حيث أننا ننتج الكثير ما أمكن من المناضد. ومن ناحية أخرى فإن إستخدام ساعة زائدة من ساعات الدهان(S_1= صفر حاليا) يعنى إنتاج ١\ ٢ وحدة من المناضد . وحيث أن كل منضدة تساهم ب ٧ جنيهات، ففى هذه الحالة سنخسر ١\ ٢ × ٧ جنيهات= ٣,٥ جنيه. ويطلق اسم أسعار الظل Shadow-Pricesعلى قيم صف(C_j-Z_j) لأعمدة المتغيرات الزائدة Slack، وهى طريقة أخرى لتفسير النتائج السلبية لقيم (C_j-Z_j) إذ قد ينظر إليهم كزيادة محتملة فى الربح إذا أمكن أستخدام ساعة إضافية من هذه الموارد المحدودة (ساعات الدهان وساعات النجارة). **وثانيا**: أننا نستخدم هذا الصف لتحديد المتغير الذى سيدخل الحل التالى حيث لم نحصل بعد على الحل المثالى.

تطوير الجدول السابق

١- حيث أننا لم نحصل على الحل الأمثل بعد فسنبحث عن العمود والصف والرقم المحورى.وبالنظر إلى الجدول السابق نجد أن أكبر قيمة (C_j-Z_j) وموجبة فى هذا الصف هى ٢\٣. ومعناها أن كل كرسى يُنتج ستزداد قيمة الدالة ب ٢\٣ جنيها أو ١,٥ جنيه وبذلك يكون عمود X_2 هو العمود المحورى.

٢- وتتضمن الخطوة الثانية التعرف على الصف المحورى أى ما هى المتغيرات الموجودة حاليا فى الحل (S_2 , X_1) سيخرج ليحل محله X_2. فباتباع القاعدة السابقة للوصول إلى أى المتغيرات أكثرها حدية سنجد أن المتغير S_2 سيخرج من الحل القاعدى ويحل محلهX_2 كما يتضح من الجدول السابق، ونتيجة لذلك يتكون الجدول التالى (١-٥).

جدول (١-٥) الجدول النهائى للسمبلكس

Solution Mix	C_j →	£ 7	£ 5	£ 0	£ 0	Quantity
	↓	X_1	X_2	S_1	S_2	
X_1	£ 7	1	0	3/2	-1/2	30 = (-1/2×40+50)
X_2	5	0	1	-2	1	40
	Z_j	£ 7	£ 5	£ 1/2	£ 3/2	
	$C_j - Z_j$	£ 0	£ 0.	- £ 1/2	-£ 3/2	£ 410

أى أن الحل النهائي هو X_1= 30

X_2= 40

S_1= صفر

S_2= صفر

صافي الربح = 410 جنيه

وأن X_1 ، X_2 هما المتغيران النهائيان القاعديان basic variables ، وأن S_1 ، S_2 فهما غير قاعديان non-basic variables.

وللتأكد من نتائج الحل الأمثل يجرى تعويض هذه القيم في دالة الهدف و القيود فنجد أن:

القيد الأول

$$2X_1 + 1X_2 \leq 100$$
$$2(30) + 1(40) \leq 100$$
$$100 \leq 100$$

القيد الثاني

$$4X_1 + 3X_2 \leq 240$$
$$4(30) + 3(40) \leq 240$$
$$240 \leq 240$$

وأرباح دالة الهدف =

$$7X_1 + 5X_2$$
$$= 7(30) + 5(40)$$
$$= £\ 410$$

ملحوظة: قد يلجأ البعض إلي حساب القيمة الأكثر تكلفة $(Z_j - C_j)$ بدلاً من $(C_j - Z_j)$ وفى هذه الحالة سنختار القيمة الأكثر سلبية في اختيار العمود المحورى مع بقاء باقى القواعد الأخرى كما هى وعكس التفسيرات السابقة، ويكون الحل الأمثل عندما تكون كل قيم هذا الصف $(Z_j - C_j)$ صفرية أو موجبة. وهذا هو ما سنستخدمه فى التطبيقات الأكثر تعقيداً. وفيما يلى مثال بسيط لتلك الفكرة.

ويتراءى هذا الحل لمشكلتنا في الجدول (١-٦). وعند هذه النقطة سينصب اهتمامنا بدرجة أكبر علي ما تعنيه هذه الأرقام وليس كيفية تقديرها.

جدول (١-٦) الحل بأسلوب سمبلكس لمشكلة الذرة وفول الصويا

Basis مخلوط الحل	C_j →	أنشطة حقيقية		أنشطة متاحة		مستوي النشاط RHS	$bj = \frac{Q}{aij}$
		ذرة	فول صويا	أرض بور	ساعات عمل		
		56	47	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2		
S_1	0	1	1	1	0	50	50/1= 50
S_2	0	(3)	2	0	1	120	120/3= 40
الربح =	Z_j	0	0	0	0		
Zj -	C_j	-56	-47	0	0	$ 0.0	
S_1	0	0	(1/3)	1	-1/3	10	10 ÷1/3=30
X_1	56	1	2/3	0	1/3	40	40 ÷2/3=60
	Z_j	56	37 1/3	0	18 2/3		
Z_j -	C_j	0	-9 2/3	0	18 2/3	$ 2240	
X_2	47	0	1	3	-1	30	
X_1	56	1	0	-2	1	20	
	Z_j	56	47	29	9		
Z_j -	C_j	0	0	29	9	$ 2530	

حيث C_j: هي عمود ربحية الوحدة ...، $Z_j - C_j$: التكاليف المختزلة ، وفى النهاية تكون قيم هذا الصف موجبة أو صفرية.

الخطوة الأولى

فى الجدول المبدئى نجد في الحل الجارى (Basis) ٥٠ فدانا من الأرض بورا وكذلك ١٢٠ ساعة عمل غير مستغلة، ويتولد عن ذلك ربحا قدره صفرا. وينتمي هذا الحل إلى النقطة A فى الشكل (١-١). ويعرض الجدول (١-٧) إعادة لمحتويات الجدول المبدئى .

جدول (١ـ٧) محتويات الجدول المبدئى

مستوى النشاط	صفر $لساعة عمل غير مستغلة	صفر $ربح للفدان البور	٤٧ $ ربح لفدان فول الصويا	٥٦ $ ربح لفدان الذرة	
	أنشطة متاحة Disposable Activities		أنشطة رئيسية Real Activities		
	S_1	S_2	X_1	X_2	
٥٠ فدان أرض	صفر فدان \ ساعة عمل غير مستغلة	١ فدان أرض \ فدان بور	١ فدان أرض \ فدان فول صويا	١ فدان أرض \ فدان ذرة	الأرض المتاحة
١٢٠ ساعة عمل	١ ساعة عمل \ ساعة عمل غير مستغلة	صفر ساعة عمل \ فدان بور	٢ ساعة عمل \ فدان فول صويا	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	ساعات العمل
صفر $ من الأرباح	صفر ربح \ ساعة عمل غير مستغلة	صفر ربح \ فدان بور	ـ٤٧ $ ربح لكل فدان فول صويا	ـ٥٦ $ ربح لكل فدان ذرة	$Z_j - C_j$ صافى الربح

$: علامة الدولار الأمريكى.

الخطوة الثانية

ولو أن الحل الحالى موجود إلا أنه من المناسب البحث عن حل ذى قيمة موجبة ، و سنختار في البداية النشاط الأكثر سلبية($Z_j - C_j$)، وفي هذه الحالة هو الذرة بقيمة قدرها (– ٥٦) دولار ، ومن الشكل (١ – ١) فهذا يتمشى مع الحركة على امتداد المحور الأفقى. ولما كان الحل يجب أن يبقى فى إطار مشروعية منطقة الإنتاج المظللة فخطوات السمبلكس تحدد المسافة القصوى التي تتحركها في اتجاه الذرة، وذلك بقسمة كمية الموارد المتاحة على معدل استخدام الذرة لها ($b_j = Q / a_{ij}$) .

فللأرض $\dfrac{\text{٥٠ فدان من الأرض}}{\text{١ فدان أرض \ فدان ذرة}}$ = ٥٠ فدان ذرة

ولساعات العمل $\dfrac{\text{١٢٠ ساعة عمل}}{\text{٣ ساعة عمل \ فدان ذرة}}$ = ٤٠ فدان ذرة

وتبين هاتان المعادلتان أن ساعات العمالة هى أكثر الموارد قيدا. ويقوم السمبلكس بتعريفنا بالخطة التى يمكن بها إنتاج الذرة بأكبر كمية ممكنة، وحينئذ يترك S_2 (ساعات العمل الغير مستخدمة) القاعدة Basis ويحل محله الذرة X_1، يتم ذلك بقسمة كل عنصر فى صف ساعات العمل على معامل ساعات العمالة \ فدان ذرة. وتقاطع الصف الذى سيخرج والعمود الداخل يعطينا النقطة المحورية (الرقم المحورى) وهو فى حالتنا "٣"، الجدول (١–٦) .

والصف الجديد للذرة في الخطوة الثانية يتحدد كالتالى:

١٢٠ ساعة عمل	÷	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	=	٤٠ فدان ذرة (الصف المقيد)(الصف المحورى)
٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	÷	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	=	١ فدان ذرة \ فدان ذرة
٢ ساعة عمل \ فدان صويا	÷	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	=	٣\٢ فدان ذرة \ فول صويا
صفر ساعة عمل \ فدان بور	÷	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	=	صفر فدان ذرة \ فدان بور
١ ساعة عمل \ ساعة عمل غير مستغلة	÷	٣ ساعة عمل \ فدان ذرة	=	٣\١ فدان ذرة \ ساعة عمل غير مستغلة

ومن صف الذرة الجديد والجدول المبدئى يحدد السمبلكس الخطوة الثانية والتي تظهر نتائجها في الجدول (١–٦) وتتمثل نتائج الخطوة الثانية فى النقطة (D) فى الشكل (١–١) حيث يتولد ربح قدره ٢٢٤٠ دولار (وحيث تكون الأرض هى أكثر الموارد قيدا، وتخرج الأرض البور S_1 من الـ Basis ليحل محلها نشاط فول الصويا X_2.

وبالإضافة إلى ذلك فإن نتائج الخطوة الثانية تصف لنا ما يحدث عند محاولة ادخال نشاط لم يدخل حاليا في خطتنا (Basis)، فالأنشطة الغير قاعدية non basic activities عند هذه النقطة هى ساعات العمل

الغير مستغلة ونشاط فول الصويا. فعمود ساعات العمل الغير مستغلة S2 يشير إلى أن دخول ساعة واحدة منها تتسبب فى الآتى :

١- إضافة ١\ ٣ فدان إلى الأرض البور.

٢- تقليل مساحة الذرة بمقدار ١\ ٣ فدان.

٣- تقليل الربح بـ ١٢\ ٣ ١٨ دولار.

وبخصوص نشاط فول الصويا كنشاط غير قاعدى فالعمود الخاص به يبين أن زيادة مساحته بفدان واحد ينتج عنه :

١- نقص الأرض البور بمقدار ١\ ٣ فدان.

٢- نقص مساحة الذرة بمقدار ١٢\ ٣ فدان.

٣- إضافة ١٢\ ٣ ٩ دولار إلى الربح الكلى.

الخطوة الثالثة

ويشير المنطق إلى أن الحل يمكن أن يتحسن بزيادة إنتاج فول الصويا من الصفر إلى كمية موجبة. وهذا يتمشى مع الحركة من D إلى C على إمتداد حدود ساعات العمل كما يتبين من الشكل (١-١). تذكر أن ساعات العمل قد أستنفذت ، فلا نتاج فدان من فول الصويا يجب أن نخرج ساعات العمالة من إنتاج الذرة ونخصصها لإنتاج فول الصويا. ويكون الإنتاج ٢٠ فداناً من الذرة ، ٣٠ فداناً من فول الصويا ومولداً ربحاً كلياً قدره ٢٥٣٠ دولار. وتسمى الأنشطة القاعدية فى الحل النهائى بـ Primal solution ونجد أن الأنشطة غير القاعدية فى هذه النقطة هى أرض بور وساعات عمل غير مستغلة.

وبالقراءة لهذه الأعمدة فى الخطوة الثالثة (النهائية) يمكن أن يقال أنه إذا أدخلنا فداناً من الأرض البور سينتج عن ذلك الآتى :

١- تخفيض مساحة فول الصويا بمقدار ٣ فدان.

٢- زيادة مساحة الذرة بمقدار ٢ فدان.

٣- يقلل الربح بمقدار ٢٩ دولار.

وبنفس الطريقة يمكن أن يقال أن إدخال ساعة عمل غير مستغلة سينتج عنها الآتى:

١- زيادة مساحة فول الصويا بمقدار فدان واحد.

٢- تخفيض مساحة الذرة بمقدار فدان واحد.

٣- تقليل الربح بمقدار ٩ دولارات.

وأحسن تعديل يمكن عمله، هو إذا تركنا فداناً من الأرض بوراً كما يرى فى العمود S_1 ، أى تقليل مساحة فول الصويا بمقدار ٣ فدان فإنه سيحرر ٦ ساعات عمالة تستخدم فى زيادة مساحة الذرة بمقدار ٢ فدان ، ويكون ذلك بأقل قدر من الخسارة المتحققة وهى ٢٩ دولار. وبنفس القول يعنى ذلك أنه إذا كان لدينا فدان إضافى من الأرض فإن الربح سيزيد بمقدار ٢٩ دولار، ونفس المثال يطبق

على ساعات العمل غير المستغلة فهى قد تزيد الربح بمقدار ٩ دولارات. خلاصة القول أن الحل الأمثل لا يمدنا فقط بالأنشطة التى تعظم الدخل، بل أيضا كم وحدة أو أكثر من كل من العناصر يجرى تقدير قيمتها. ويطلق عادة على هذه القيم ، أسعار الظل والتى يتحصل عليها أيضاً بأسلوب الحل المزدوج

. Dual Solution

وبطريقة مختصرة يمكن أن نعرض موجزا لهذا الأسلوب من المشكلة كالآتى:

Maximize $\Pi = 56 X_1 + 47X_2$

Subject to: $1X_1 + 1X_2 \le 50$

$3X_1 + 2X_2 \le 120$

$X_1, X_2 \ge 0$

حيث الرمز Π (باى) يشير إلى الربح.

و باستخدام أسلوب السمبلكس فقد كان الحل الأمثل للمشكلة كالآتى:

١- مساحة ٣٠ فدانا من فول الصويا.

٢-مساحة ٢٠ فدانا من الذرة.

٣- تحقيق ربح قدره ٢٥٣٠ دولار.

وأظهر الحل المزدوج Dual solution الآتى:

١- أن كل فدان إضافى من الأرض سيتكلف ٢٩ دولار.

٢- أن كل ساعة عمل إضافية ستتكلف ٩ دولارت.

حالات خاصة من القضايا المتعلقة بالبرمجة الخطية (من خلال السمبلكس)

*** وجود أكثر من حل أمثل:**

قد يصادفنا وجود حلول مثلى أو تبادلية alternate عند استخدام أسلوب السمبلكس. فإذا كانت قيمة $(C_j - Z_j)$ تساوى صفراً لمتغير حقيقى غير موجود فى مخلوط الحل فسيتواجد هناك أكثر من حل مثالى. ويوضح الجدول التالى الحلول التبادلية المثلى المنوه عنها.

جدول (١-٨) الحل الأمثل المتردد

مخلوط الحل	C_j	£ 3	£ 2	£ 0	£ 0	الكمية Quantity
		X_1	X_2	S_1	S_2	
X_2	£ 2	3/2	1	1	0	6
S_2	£ 0	1	0	1/2	1	3
	Z_j	£ 3	£ 2	£ 2	£ 0	
$C_j -$	Z_j	£ 0	£ 0	£ -2	£ 0	£ 12

ويشير الجدول الأخير لمشكلة تعظيم الدالة إلى أن كل قيمة فى صف$(C_j - Z_j)$تساوى صفراً أو سالبة مبينة الوصول إلي الحل الأمثل للمشكلة. ويقرأ الحل بأن X_2 = ٦ ، S_3 = ٣ ، وأن الربح = ١٢ جنيها، ويلاحظ بالرغم من ذلك أن المتغير X_1 يمكن إدخاله فى مخلوط الحل بدون زيادة أو نقص الربح. ويكون الحل الجديد عند تواجد X_1 فى مخلوط الحل Basis أن سيصبح X_1 = ٣ ، X_2 = ٣\٢ ، ومازال الربح عند القيمة ١٢ جنيه. فهل يمكنك تعديل الجدول المشار إليه لإثبات ذلك؟

*** حالة التدهور Degeneracy**

ويحدث ذلك عندما تتضمن مشكلتنا من البرمجة الخطية قيوداً متكررة، بمعنى وجود رابطة أو أكثر فى التشكيل بينها ويجعل القيد الآخر غير ضرورى لاستخدامه. ويحدث ذلك عند حساب b_j لتحديد أكثر الصفوف حدية. فإذا وجدت نفس القيمة الصغرى مكررة مرتين فهذا دليل علي وجود حالة التدهور مما يستمر معه الدوران بين الحلين غير الأمثلين إلى ما لا نهاية، أى يدخل متغير جديد فى الحل ثم يخرج في الخطوة التالية وتستمر الدائرة بدخوله ثانية وخروجه. وكطريقة بسيطة للتعامل مع هذا الموقف هو اختيار أى من الصفين، فإذا تكرر التدهور يستخدم الصف الآخر.

ويبين الجدول التالى مثالاً لحالة التدهور فى تعظيم دالة الهدف. فعند هذه الخطوة من الحل فإن المتغير التالى ليدخل الحل سيكون X_1، حيث هو الوحيد الذى قيمة$(C_j - Z_j)$ له موجبة.

جدول (١-٩) مشكلة فى حل السمبلكس لإظهار حالة التدهور

مخلوط الحل	$C_j \rightarrow$ / $\downarrow$	£ 5	£ 8	£ 2	£ 0	£ 0	£ 0	الكمية
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Quantity
X_2	£ 8	1/4	1	1	– 2	0	0	10
S_2	£ 0	4	0	1/3	– 1	1	0	20
S_3	£ 0	2	0	2	2/5	0	1	10
	Z_j	£ 2	£ 8	£ 8	£ 16	£ 0	£ 0	
	C - Z_j	£ 3	£ 0	£ - 6	£ – 16	£ 0	£ 0	£ 80

وبحساب قيم b_j للصفوف نجدها كالآتى:

صف X_2 : $10 \div 1/4 = 40$

صف S_2 : $20 \div 4 = 5$ ←

صف S_3 : $10 \div 2 = 5$ ←

وجود رابطة بين أقل النسب bij كدليل على حالة التدهور.

أما تلك الحالات الخاصة من مشاكل البرمجة الخطية التى يستخدم فيها الحل البيانى فهى:

(١) عدم وجود حل ممكن infeasibility

(٢) عدم وجود حدود للحل unboundedness

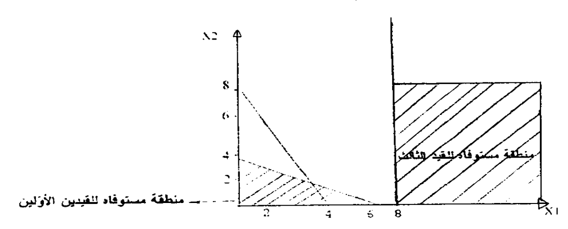
(٣) الترهل redundancy

(٤) وجود أكثر من حل أمثل alternate optimal solution

أولاً: حالة عدم وجود حل ممكن:

وتظهر عندما لا يوجد حل للبرنامج الخطى الذى يفى بكل القيود المعطاة، وينشأ من تركيب المشكلة من قيود متعارضة، ويمثلها الشكل البياني (١- ٣)

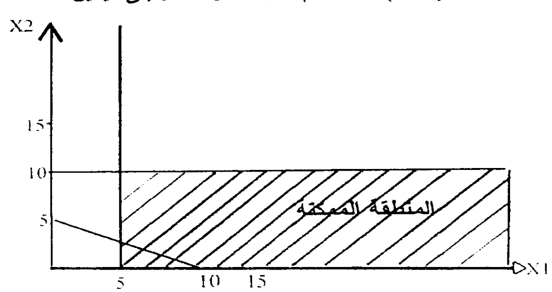
شكل (١- ٣) حالة مشكلة بدون حل ممكن



ثانياً:حالة عدم وجود حد للحل:

وحيث لا يوجد حل محدد للمشكلة، بمعنى أنه فى حالة تعظيم للدالة فإن المتغيرات لحل أو أكثر، والربح، يمكن تحقيقهم بكميات كبيرة لا نهائية بدون مخالفات للقيود، ويمثلها الشكل البيانى (١- ٤).

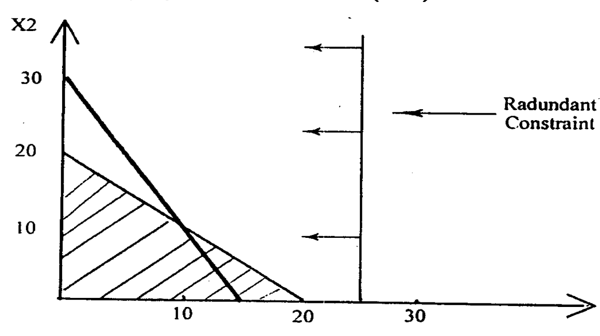
شكل (١- ٤) حالة عدم وجود حدود للحل إلى اليمين



ثالثاً: حالـة الترهل

ولا يتسبب عنها أى صعوبات كبيرة فى حل مشاكل البرامج الخطية. والقيد المترهل (الزائد) هو الذى لا يؤثر فى منطقة الحل الممكن. وفى كلمات أخرى، فقيد واحد قد يكون أكثر قيداً من الآخر وبالتالى ينفى أخذه فى الاعتبار، ويمثلها الشكل البيانى (١- ٥).

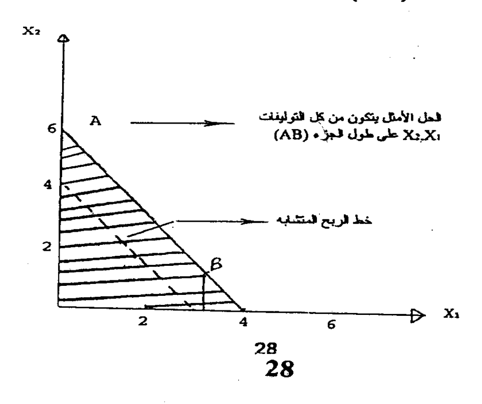
شكل (١- ٥) مشكلة ذات قيد مترهل (زائد)



رابعاً: حالة وجود أكثر من حل أمثل

ويمكن نشوء هذه الحالـة، أحياناً، حيث يكون هناك حلين أو أكثر. وتُصوَّر بيانياً عندما يمر خط الربح المتشابه أو التكلفة المتشابهة لدالة الهدف – موازياً تماماً لأحد قيود المشكلة، وبمعنى آخر يكون لهما نفس الانحدار، ويمثلها الشكل البيانى (١- ٦).

شكل (١- ٦) حالة وجود حلول مثلى تبادلية



28

استخدام أسلوب السمبلكس فى حل المشاكل التى لها قيود من ذات الحدود الدنيا

وكما هو معروف فى مشاكل الحياة الواقعية، وخاصة فى مشاكل البرمجة الخطية والتى تتعرض لمشاكل التدنية minimization ، فإنه يوجد قيود أكبر من (≥) أو مساوية (=) تحوّل أيضاً إلى أشكال خاصة بخلاف ما سبق ذكره. فإذا لم تعالج هذه القيود فإن أسلوب السمبلكس لن يستطيع الوصول إلى الحل المبدئى الممكن فى الجدول المبدئى.

وفى هذا الصدد سنتعرف على كيفية تحويل هذه القيود:

$5\ X_1 + 10\ X_2 + 8\ X_3 \geq 210$ القيد الأول (١)

$25\ X_1 + 30\ X_2 = 900$ القيد الثانى (٢)

المتغيرات الفائضة Surplus variables

تدلنا تلك المتغيرات على كم يزيد الحل عن القيد للمورد. ولتبسيط العرض فإن المماثلة مع المتغيرات الزائدية slack variables يقابلها هنا المتغيرات الفائضة والتى تسمى أحياناً المتغيرات السالبة negative slack. ولتحويل القيد الأول، فسنبدأ بطرح المتغير الفائض لتحويل القيد إلى مساوية كالآتى:

$$5\ X_1 + 10\ X_2 + 8\ X_3 - S_1 = 210$$

فعلى سبيل المثال إذا كان الحل لبرنامج خطى يتضمن هذا القيد هو X1 = ٢٠ ، X2 = ٨ ، X3 =٥ فإن كمية هذا المتغير الفائض أو العنصر الغير مستخدم من المورد قد تحسب كالآتى :

$$5\ X_1 + 10\ X_2 + 8\ X_3 - S_1 = 210$$

$$5\ (20) + 10\ (8) + 8\ (5) - S_1 = 210$$

$$100 + 80 + 40 - S_1 = 210$$

$$\therefore - S_1 = 210 - 220$$

$S_1 = 10$ وحدات فائضة من العنصر الأول

ولكن مازال هناك خطوة واحدة أخرى لإعداد هذا القيد (≥) لأسلوب السمبلكس.

المتغيرات المصطنعة Artificial variables

تتواجد مشكلة واحدة صغيرة عند محاولة استخدام القيد الأول (كما عرض مؤخراً) فى إعداد الحل المبدئى للسمبلكس. ولما كانت كل المتغيرات الحقيقية Real مثل X_3, X_2, X_1 تُعطى قيماً صفرية فى الجدول المبدئى، فإن S_1 يأخذ قيمة سالبة.

$$5\ (0) + 10\ (0) + 8\ (0) - S_1 = 210$$

$$0 - S_1 = 210$$

$$S_1 = -210$$

ولكن كل المتغيرات فى مشاكل البرمجة الخطية، سواء كانت حقيقية أو زائدية أو فائضية، يجب أن تكون غير سالبة فى كل الأحوال. فإذا كانت S_1 = - ٢١٠ فإن ذلك الشرط الهام قد إنتفى. ولمجابهة هذا الموقف، سنقدم نوعاً آخر من المتغيرات يسمى المتغير المصطنع artificial variable . فببساطة نضيف (a_1) إلى القيد كالتالى:

$$5 X_1 +10 X_2 +8 X_3 - S_1+ a_1 = 210$$

فالآن ، فليس فقط تأخذ المتغيرات X_3 , X_2 , X_1 **قيماً صفرية بل كذلك المتغير الزائدى** S_1، وبهذا يتبقى لنا a_1 = ٢١٠ . وبالرجوع إلى القيد الثانى نجد أنه فى حالة المتساوية ، فلماذا نقلق بشأنه؟ فلتضمينه فى الحل المبدئى ، فإن تلك المتساوية يجب أن يضاف إليها متغير مصطنع a_2 لتكون كالآتى:

$$25 X_1 + 30 X_2 + a_2 = 900$$

والسبب فى إدخال هذا المتغير المصطنع فى قيد المتساوية هو لمحاولة إنشاء الحل المبدئى. فلقيد بسيط مثل القيد الثانى، من السهل تخمين أن X_1= 0 ، X_2 = 30 حتى نحصل على حل مبدئى ممكن. ولكن ما الحل إذا كانت مشكلتنا لها عشرة قيود من المتساويات ، وكلٌ تحتوى على سبعة متغيرات؟ فسيكون من الصعب إنشاء الحل المبدئى. فبإضافة المتغيرات المصطنعة مثل a_2 فنستطيع إيجاد حل مبدئى تلقائياً. وفى هذه الحالة، فحينما نُعطى X_1 ، X'_2 قيماً صفرية ، فإن a_2 = 900 .

وليس للمتغيرات المصطنعة أى معنى مادى ، ولا يزيدون عن أنهم أدوات حسابية للوصول إلى الحل المبدئى للبرامج الخطية. وقبل الوصول إلى الحل النهائى للسمبلكس، فإن كل المتغيرات المصطنعة تختفى من مخلوط الحل، وقد عولج هذا الموضوع من خلال دالة الهدف Objective function.

المتغيرات الفائضة والمصطنعة فى دالة الهدف

كلما أضيفت تلك المتغيرات إلى أى من القيود، فيجب أن تتضمنها أيضاً المعادلات الأخرى ودالة الهدف، مثلما سبق العمل به مع المتغيرات الزائدية. ولما كان على المتغيرات المصطنعة أن تخرج إجبارياً من الحل، فسنلحق بها تكلفة عالية C_j لكل منها. ففى مشاكل التدنية minimization ، فالمتغيرات ذات التكلفة المنخفضة هى أكثرها جذباً والأولوية فى دخولها الحل، أما المتغيرات ذات التكلفة العالية فتترك الحل بسرعة، أو لا تدخله على الإطلاق. وبدل أن نعطى قيمة نقدية فعلية مثل ١٠ر٠٠٠ جنيه أو مليون جنيه لكل متغير مصطنع، فببساطة سنستخدم الحرف (m) جنيه ليمثل عدد كبير جداً (وكنقطة فنية، إذا اقتضت الظروف استخدام متغير مصطنع فى مشكلة تعظيم maximization ، فتكون القيمة له فى دالة الهدف هى (m-) جنيه لإجباره على الخروج من مخلوط الحل أو ما يسمى Basis). وتُعطى المتغيرات الفائضة مثل ما أعطيت المتغيرات الزائدية قيمة التكلفة الصفرية.

فإذا كان لدينا دالة هدف لتدنية التكلفة كالآتى:

$$\text{Minimize} \quad Cost = £\,5\,X_1 + £\,9\,X_2 + £\,7\,X_3$$

ومعها القيود السالف الإشارة إليهما فإن المشكلة فى صورة Tableau تكون كالآتى:

$$\text{Minimize Cost} \quad : 5\,X_1 + 9\,X_2 + 7\,X_3 + 0\,S_1 + m\,a_1 + m\,a_2$$

$$\text{Subject to} \quad : 5\,X_1 + 10\,X_2 + 8\,X_3 - 1\,S_1 + 1\,a_1 = 210$$

$$: 25\,X_1 + 30\,X_2 + 0\,X_3 + \quad + 1\,a_2 = 900$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, a_1, a_2 \geq 0$$

وهنا فقد تعلمنا كيفية التعامل مع دالة الهدف والقيود المصاحبة لمشاكل التدنية ، فلنرى الآن كيفية استخدام السمبلكس لحل تلك المشاكل.

مثـــال :

عرضت إحدى المشاكل للبرمجة الخطية وكانت دالة الهدف كالآتى:

$$\text{Max.} \quad : 4\,X_1 - 5\,X_2 - 5\,X_3$$

$$\text{Subject to} \quad : 0.\,X_1 - 1\,X_2 + 1\,X_3 - 1\,S_1 = 2$$

$$-1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 - 1\,S_2 = 1$$

$$0.\,X_1 + 0.\,X_2 - 1\,X_3 - 1\,S_3 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0.0$$

وبعرض المشكلة فى صورة Tableau كانت كالآتى:

$$\text{Max.} \quad : 4\,X_1 - 5\,X_2 - 5\,X_3 + 0.\,S_1 + 0.\,S_2 + 0.\,S_3 - m\,a_1 - m\,a_2 - m\,a_3$$

$$\text{Subject to} : 0.\,X_1 - 1\,X_2 + 1\,X_3 - 1\,S_1 + a_1 = 2$$

$$-1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 - 1\,S_2 + a_2 = 1$$

$$0.\,X_1 + 0.\,X_2 - 1\,X_3 - 1\,S_3 + a_3 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0.0$$

وتعرض البيانات فى الجدول المبدئى كالآتى:

جدول (١٠-١) الحل الأمثل فى حالة القيود ذات الحدود الدنيا

مخلوط الحل	c_j	أنشطة حقيقية			أنشطة متاحة			أنشطة مصطنعة			مستوى النشاط RHS	
	$c_j \rightarrow$	4	-5	-5	0	0	0	-m	-m	-m		
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3		
a_1	-m	0	-1	1	-1	0	0	1	0	0	2	الجدول المبدئى
a_2	-m	-1	1	1	0	-1	0	0	1	0	1	
a_3	-m	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	1	
Z_j		m	0	-m	m	m	m	-m	-m	-m		الخطوة الثانية
$C_j - Z_j$		4-m	-5	-5+m	-m	-m	-m	0	0	0	-4m	
a_1	-m	1	-2	0	-1	1	0	1	-1	0	1	الخطوة الثالثة
X_3	-5	-1	1	1	0	-1	0	0	1	0	1	
a_3	-m	-1	1	0	0	-1	-1	0	1	1	2	
Z_j		5	-5+m	-5	m	5	-m	-m	-5	-m		
$C_j - Z_j$		-1	-m	0	-m	-5	-m	0	5-m	0	-3m +5	

وهنا جميع القيم $(C_j - Z_j)$ فى الصف الاخير غير موجبة ، ومعنى ذلك وصولنا إلى الحل الامثل. وفى حالة الحساب $(Z_j - C_j)$ فسيكون الحل الامثل عندما تكون كل قيم هذا الصف صفرية أو موجبة كما سنرى عند عرض مشاكل أكثر تعقيداً.

معجم المصطلحات Glossary

طريقة السمبلكس هى طريقة مضمونة جدية لحل مشاكل البرمجة الخطية.

إجراء التقريب : **iteration** وهى عملية تعيد فيها نفس الخطوات دائما.

متغير زائد : **Slack variable** وهو متغير يضاف إلى القيود التى لها علاقة أقل من أو يساوى لكى توجد متساوية لطريقة السمبلكس. وهو يمثل كمية من عنصر غير مستخدم.

جدول السمبلكس : **Simplex tableau** وهو جدول لاقتفاء الحسابات لكل عملية تقريب فى طريقة السمبلكس.

مخلوط الحل : **Solution mix** وهو عمود فى جدول **Simplex** يحتوى على كل المتغيرات فى الحل.

عمود الكمية : **Quantity Column** وهو عمود يعطى القيم العددية لكل متغير فى عمود مخلوط الحل.

الحل الممكن الاساسى : **Basic feasible Solution** وهو حل للبرنامج الخطى يُنتمى إلى نقطة ركنية من المنطقة الممكنة.

الأساس : **Basis** وهى مجموعة المتغيرات فى الحل، التى لها، قيم موجبة، غيرصفرية، وتتواجد فى عمود مخلوط الحل. وهذه تسمى المتغيرات الاساسية.

المتغيرات غير الاساسية: **Nonbasic variables** وهى متغيرات لا تتواجد فى مخلوط الحل أو الاساس وتساوى الصفر.

معدلات الإحلال : **Substitution rates** وهى المعاملات فى الجزء الأساسى من جدول السمبلكس وتبين عدد الوحدات من كل متغير رئيسى ويجب أن يخرج من الحل إذا دخل متغير جديد فى الحل (متمثلا فى قمة عمود الجدول).

صف Z_j : وهو الصف الذى يحتوى على أرقام اجمالى الربح أو الخسارة المتحققة من إضافة وحدة واحد ة من متغير إلى الحل.

صف C_j-Z_j : وهو الصف المحتوى على صافى الربح أو الخسارة التى تنتج من إضافة وحدة واحدة من التغير المشار إليه فى هذا العمود إلى الحل.

العمود المحورى: **Pivot Column** وهو العمود ذو أكبر قيمة موجبة فى صف فى (C_j-Z_j)فى مشكلة تعظيم الإنتاج، أو أكبر قيمة سالبة فى مشكلة تدنية Minimization وهو يبين أى متغير سيدخل الحل.

صف Z_j : وهو الصف الذى يحتوى على أرقام اجمالى الربح أو الخسارة المتحققة من إضافة وحدة واحدة من متغير إلى الحل.

صف C_j-Z_j : وهو الصف المحتوى على صافى الربح أو الخسارة التى تنتج من إضافة وحدة واحدة من التغير المشار إليه فى هذا العمود إلى الحل.

العمود المحورى: Pivot Column وهو العمود ذو أكبر قيمة موجبة فى صف فى (C_j-Z_j)فى مشكلة تعظيم الإنتاج، أو أكبر قيمة سالبة فى مشكلة تدنية Minimization وهو يبين أى متغير سيدخل الحل.

الصف المحورى: Pivot وهو الصف الذى يرتبط بالمتغير الذى سيترك الأساس ليحل محله المتغير الجديد (المبين بالعمود المحورى الجديد). ويتحدد بأن له أقل نسبة موجبة تتواجد بقسمة قيم عمود الكمية على قيم العمود المحورى لكل صف.

الرقم المحورى : Pivot number وهو العنصر الناتج من تقاطع الصف المحورى مع العمود المحورى.

الحل الجارى : Current solution وهو الحل الاساسى الممكن ، أى مجموعة المتغيرات الحالية فى الحل ، وهى تنتمى إلى نقطة ركنية من المنطقة الممكنة feasible region.

المتغير الفائض : Surplus variable وهو المتغير الذى يضاف إلى القيد ذو علاقة أكبر من أو يساوى لكى توجد متساوية. ويمثل كمية استخدام العنصر فوق أدنى استخدام مطلوب.

المتغير المصطنع: Artificial variable وهو متغير لا معنى له ماديا، ولكن يستخدم كأداة للوصول إلى الحل المبدئى فى البرامج الخطية.

عدم وجود حل ممكن : In feasibility وهو الموقف الذى ليس له حل يستوفى كل قيود المشكلة.

عدم وجود حد للمشكلة : Unboundedness وهى حالة تصف مشاكل التعظيم فى البرامج الخطية ذات الحلول غير المحدودة الكثيرة بدون مخالفات القيود الموضوعة.

التدهور : Degeneracy وتظهر هذه الحالة عند وجود رابطة بين القيم التى تحدد أى المتغيرات سيدخل الحل لاحقاً. وقد تقود إلى حالة الدوران بين الحلول غير المثلى إلا ما لانهاية.

*

إضافة أنشطة أخرى

فى معظم البرامج الخطية يعتبر الحل الامثل كبداية للتفكير فى إمكانية إضافة أنشطة أخرى. ومن المنطقى السؤال عن هذه النقطة على ما يلى:

١ - هل يمكن تأجير الأرض بأقل من ٢٩ دولار للفدان ؟

٢ - هل يمكن تأجير عمالة بأقل من ٩ دولارات للساعة ؟

والإجابة على كليهما هى من المحتمل نعم، ولنبدأ أولا بالعمالة. نفترض أننا نستطيع تأجير عامل بتكلفة قدرها ٢ دولار فى الساعة، ذلك يتضمن وجود ترابط بين إنتاج الذرة وإنتاج فول الصويا وعمالة مستأجرة يمكن أن تحقق ربما أكثر مما فى مشكلتنا الأولى والتى لم تتضمن إمكانية تأجير عمالة. فتأجير عمالة يمكن إليه مثل نشاط إنتاج الذرة أو الفول الصويا، فتأجير ساعة عمل سيؤدى إلى:

١ - تكلفة قدرها ٢ دولار.

٢ - لن يستخدم أرضا (أى ان عنصر تأجير العمالة هو عمل مستقل بذاته).

٣ - زيادة توفر الحصول على عمالة بساعة واحدة.

ويبين لنا الجدول (١-١١) مشكلة البرنامج الخطى المعدل وحل المشكلة باستخدام أسلوب السمبلكس. كما يبين لنا الجدول المبدئى اضافة نشاط حقيقى لساعات العمالة المستأجرة. كما يشير الحل الجديد إلى تأثير اضافة هذا النشاط على الحل السابق.

جدول (١-١١) الحل بأسلوب السمبلكس لمشكلة الذرة وفول الصويا والعمالة المستأجرة

		أنشطة حقيقية			أنشطة متاحة		مستوى النشاط (RHS)	
		ذرة	فول صويا	عمالة مستأجرة	أرض	ساعات عمل		
C_J		56	47	-2	0	0		
(مخلوط الحل)		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2		
S_1	0	1	1	0	1	0	50	الجدول المبدئى
← S_2	0	(3)	2	-1	0	1	120	
$Z_j - C_j$		-56	-47	2	0	0	$ 0	
S1	0	0	1/3	(1/3)	1	-1/3	10	الخطوة الثانية
→ X_1	56	1	2/3	-1/3	0	-1/3	40	
$Z_j - C_j$		0	-9 2/3	-16 2/3	0	18 2/3	$ 2240	
→ X_3	-2	0	1	1	3	-1	30	الخطوة الثالثة
X_1	56	1	1	0	1	0	50	
$Z_j - C_j$		0	7	0	50	2	$ 2740	

ويظهر الحل المبدئى فى جدول (١-١١) دخول نشاط الذرة كأكثر الانشطة ربحية مما يدخله فى المتغيرات القاعدية Basis ليحل محل العمالة. ونحصل فى الخطوة الثانية على ١٠ أفدنه من الارض البور و ٤٠ فداناً من الذرة وربما قدرة ٢٢٤٠ دولار. ويلاحظ فى الخطوة الثانية أن أستنجار ساعة عمل سينتج عنه الآتى:

١- استخدام ٣/١ فدان من الارض.
٢- اضافة ٣/١ فدان لمساحة الذرة.
٣- اضافة ٣/٢ ١٦ دولار إلى الربح الكلى.

وبفحص صف (Z_j-C_j) **فى الحذف الثانى** يتضح أن استنجار عمالة كان أكثر العناصر ربحاً. وكما فعلنا سابقاً للتوصل إلى أكثر الأعمدة ربحية (استنجار عمالة) لتحديد أكثر العناصر قيداً ، فقد حسب ذلك بقسمة كمية العنصر المتاحة على معدل الاحلال الذى تسخدمه العمالة المؤجرة.

فللأرض:

١٠ فدان أرض ÷ $\frac{\text{٣\١ فدان أرض}}{\text{ساعة عمالة}}$ = ٣٠ ساعة عمل (الصف المحورى)

وللذرة:

فإن انتاجها **لا يحد من استنجار العمالة حيث أن كل** ساعة عمل مستأجرة تضيف إلى إنتاج الذرة. وبنفس القول، إذا كانت قيمة **المعامل هى صفر** (بدل من السالب) فإن إنتاج الذرة لن يحد من استنجار ساعات العمالة.

ويتضح مما سبق أن **الارض هى أكثر العناصر قيداً.** ويبحث السمبلكس عن حل أحسن بتقديم الكثير من ساعات العمل **المستأجرة كحل مرتقب.** وتقاطع العمود الداخل – المحورى – (العمالة المؤجرة ممثلة بالساعات) **مع الصف الخارج (الارض)** هو النقطة المحورية $\left[\frac{\text{٣\١ فدان من الارض}}{\text{ساعة عمالة مستأجرة}}\right]$ لتحديد الصف الداخل الجديد، **والذى يظهر فى** الخطوة الثالثة من الجدول (١-١١). وتشير هذه الخطوة إلى قرار تأجير ٣٠ ساعة **عمل لإنتاج ٥٠ فدان** ذرة وتحقيق ربح قدره ٢٧٤٠ دولار. وبفحص الصف $(Z_j- C_j)$ يتضح انه ليس **هناك مدخلات** سالبة، أى ان الحل الامثل هو فى ضوء المعطيات (٥٠ فدان من الارض ، ١٢٠ ساعة عمل) **وأن الانشطة المعطاة** لنا كانت زراعة ذرة، زراعة فول الصويا وتأجير عمالة إضافية.

وبفحص الانشطة التى لم تدخل فى الحل الحالى نرى أن:

١- محاولة ادخال فدان أرض ليكون بوراً سينتج عنه:

أ- تقليل ساعات العمل المستأجرة بمقدار ٣ ساعات.

ب- تقليل مساحة الذرة فداناً واحداً.

جـ- تقليل الربح بمقدار ٥٠ دولار.

٢- محاولة إدخال ساعة من العمالة الأصلية لتكون غير مستغلة سينتج عنه:

أ- زيادة ساعات العمل المستأجرة بمقدار ساعة واحدة.

ب- تبقى مساحة الذرة بدون تغير.

جـ- تقليل الربح بمقدار ٢ دولار.

و بتدنى تأثير محاولة إدخال ساعة عمل أصلية لتكون غير مستغلة (Idle) يكون عندنا موردا لا نهائياً ومتاحاً من العمالة المستأجرة كبديل تام.

٣- محاولة إدخال فدان من فول الصويا سينتج الآتى:

أ- تقليل ساعات العمل المستأجرة بمقدار ساعة واحدة.

ب- تقليل مساحة الذرة فداناً واحداً.

جـ- تقليل الربح بمقدار ٧ دولارات.

وتعتبر الارض هى المدخل الوحيد الذى يحظى باهتمامنا فى صف(Z_j-C_j)من الخطوة الثالثة فى الوقت الحالى، وأن سعر الظل لها (التكلفة الحدية) هو ٥٠ دولار للفدان. فإذا أمكننا تأجير الأرض بأقل من ذلك فستحصل على حل أكثر ربحية ، ولنفترض أن المعدل الجارى لإيجار الفدان هو ٢٠ دولار، فى هذه الحالة سنعدل مشكلة البرنامج الخطى لتتضمن أرضاً مستأجرة كنشاط.

ويبين الجدول (١-١٢) مسألة البرنامج الخطى عندما تضاف الأرض المستأجرة إلى الجدول السابق (١-٦).

ويقودنا الحل المبدئى فى الجدول(١-١٢) الى أن تأجير فدان من الأرض سينتج عنه :

١- زيادة الأرض المتاحة بقدار فدان.

٢- أن الربحية ستنخفض بقدار ٢٠ دولار نتيجة للسبب السابق.

٣- أنه لاتأثير له على الكمية المعروضة من العمالة.

وتشير الخطوة الثالثة الى نتيجة تتضمن ٣٠ ساعة عمالة مستأجرة ، ٥٠ فدان من الذرة ، وربحا قدره ٢٧٤٠ دولار . كما أن الصف (Z_j - C_j) يحتوى على مدخل سالب مشيراً الى أنه سيزيد الربح لإدخال الأرض المستأجرة فى الحل. ويبين عمود الأرض المستأجرة أن استئجار فدان من الأرض سينتج عنه :

١- زيادة العمالة المستأجرة بقدار ٣ ساعات.

٢- زيادة مساحة الذرة بفدان واحد.

٣- زيادة الربح بمقدار ٣٠ دولار.

جدول(١-١٢) الحل بأسلوب السمبلكس لمشكلة الذرة، فول الصويا مع العمالة المستأجرة ، الأرض المستأجرة كأنشطة إضافية

Basis مخلوط الحل	C_j	أنشطة حقيقية: ذرة	فول صويا	عمالة مستأجرة	أرض مستأجرة	أنشطة متاحة: أرض	ساعات عمل	مستوى النشاط (RHS)	
	C_j →	56	47	-2	-20	0	0		
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2		
S_1	0	1	1	0	-1	1	0	50	الجدول المبدئى
← S_2	0	(3)	2	-1	0	0	1	120	
$Z_j - C_j$		-56	- 47	2	20	0	0	$ 0	
S_1	0	0	1/3	(1/3)	-1	1	-1/3	10	الخطوة الثانية
→ X_1	56	1	2/3	-1/3	0	0	1/3	40	
$Z_j - C_j$		0	-9 2/3	-16 2/3	20	0	18 2/3	$ 2240	
→ X_3	-2	0	1	1	-3	3	-1	30	الخطوة الثالثة
X_1	56	1	1	0	-1	1	0	50	
$Z_j - C_j$		0	7	0	-30	50	2	$ 2740	

وتهدف الخطوة التالية الى تحديد اكثر العناصر قيدا ، ولكننا نجد ان تأجير فدان من الأرض لا يستخدم أيا من الموارد ، وبدلا من ذلك يزيد مستوى كل الأنشطة فى الخطة الحالية . وبعبارة أخرى فعندنا حل بلا حدود **unbounded** ، اذ يفترض البرنامج الخطى أننا نستطيع تحقيق أرباح لا نهائية بإنتاج ذرة لا نهائية وتأجير عمالة لانهائية وتأجير أرض كذلك بلا حدود . وفى الحال ، فمن المنطقى تعديل المشكلة مرة أخرى .

*

تقييد الأنشطـــة المضـافـــة

عند هذه النقطة ، يجب تعريف مشكلة البرنامج الخطى فى ضوء ما يجب عمله تجاه تأجير العمالة وتأجير الأرض . سنفترض أنه يمكن تأجير ٢٠٠ ســاعة عمل بتكلفة قدرها ٢ دولار فى الساعة، وكذلك امكانية تأجير ٤٠ فدان بقيمة ايجارية قدرها ٢٠ دولار للـفدان وسنعدل البرنامج بحيث تكون القيود على التأجير للأرض والعمالة هى الحدود القصوى .

فى مشكلتنا الأصلية كانت القيود (الصفوف) هى ما نملكه . والآن نريد اضافة قيدين جديدين يمثلان تلك الأنشطة بالتحديد. ويبين الجدول (١- ١٣) الحل المبدئى والحل النهائى . وكما يتبين من ذلك الحل المبدئى فان الحد الأقصى لتأجير العمالة المتاحة هو ٢٠٠ ساعة. وبقراءة هذا الصف، نجد الآتى :

١- انتاج فدان من الذرة لا يستخدم معه أى من العمالة المستأجرة.
٢- انتاج فدان من فول الصويا لا يستخدم معه أى من العمالة المستأجرة.
٣- استئجار ساعة عمالة تستخدم ساعة من ٢٠٠ ساعة متاحة.
٤- تأجير فدان من الارض لا يستخدم معه أى من العمالة المستأجرة.
٥- ترك فدان مملوك فى حالة بور لا يستخدم عمالة مستأجرة.
٦- ترك ساعة من عمالة مملوكة غير مستخدمة لإستخدام عمالة مستأجرة.
٧- ترك ساعة عمالة بدون تأجير يقدر لها ساعة من ٢٠٠ ساعة متاحة (تذكر أن الأنشطة المتاحة Disposal Activities تتبين لنا ببساطة وتقتفى أثر الموارد غير المستخدمة).
٨- ترك فدان من الأرض غير مستأجر لا يستخدم معه أى من العمالة المستأجرة.

وبقراءة صف الحد الأقصى لتأجير الأرض يمكن أن ينتج نفس التفسيرات فى تلك الخلايا. ويبين الجدول (١-١٣) الحل لتلك المشكلة كما تشير إليها الخطوة الرابعة فى عمود مستوى النشاط، كالآتى:

١- استئجار ١٥٠ ساعة عمل .
٢- زراعة ٩٠ فدان ذرة.
٣- ترك ٥٠ ساعة عمل غير مستأجرة من أصل ٢٠٠ ساعة متاحة.
٤- تأجير ٤٠ فدان من الارض الزراعية.
٥- تحقيق ربح قدره ٣٩٤٠ دولار.

جدول (١-١٣) الحل بأسلوب السمبلكس لمشكلة الذرة ، فول الصويا مع التقييد من العمالة المستأجرة والارض المستأجرة

		أنشطة حقيقية				أنشطة متاحة					
		ذرة	فول صويا	عمالة مستأجرة	أرض مستأجرة	أرض	ساعات عمل	حد أقصى ساعات عمل مستأجرة	حد أقصى أرض مستأجرة	مستوى النشاط	
مخلوط الحل	C_j →	56	47	-2	-20	0	0	0	0	(RHS)	
	↓	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	0	1	1	0	-1	1	0	0	0	50	الجدول المبدئي
← S_2	0	3	2	-1	0	0	1	0	0	120	
S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	200	
S_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	40	
$Z_j - C_j$		-56	-47	2	20	0	0	0	0	$0	
S_1	0	0	1/3	1/3	-1	1	-1/3	0	0	10	الخطوة الثانية
→ X_1	56	1	2/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	40	
S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	200	
S_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	40	
$Z_j - C_j$		0	-4 2/3	-16 2/3	20	0	180 2/3	0	0	$2240	
→ X_3	-2	0	1	1	-3	3	-1	0	0	30	الخطوة الثالثة
X_1	56	1	1	0	-1	1	0	0	0	50	
S_3	0	0	-1	0	3	-3	1	1	0	170	
S_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	40	
$Z_j - C_j$		0	7	0	-30	50	2	0	0	$2740	

تكملة جدول (١-١٣) الحل بأسلوب السمبلكس لمشكلة الذرة ، فول الصويا مع التقييد من العمالة المستأجرة والارض المستأجرة

الخطوة الرابعة											
X_3	-2	0	1	1	0	3	-1	0	3	150	الخطوة الرابعة
X_1	56	1	1	0	0	1	0	0	1	90	
S_3	0	0	-1	0	0	-3	1	1	-3	50	
→ X_4	-20	0	0	0	1	0	0	0	1	40	
$Z_j - C_j$		0	7	0	0	50	2	0	30	$ 3940	

وتتواجد أسعار الظل فى الصف الأخير ($Z_j - C_j$) فى الخطوة الرابعة . وتشير الأرقام الى الآتى :

١- قد يجدر انفاق ٥٠ دولار للحصول على فدان اضافى لأرضنا.

٢- قد يستحق الحصول على ساعة اضافية من عمالتنا بقيمة ٢ دولار.

٣- لا يستحق أى شئ فى سبيل الحصول على حق استئجار ساعة عمالة اضافية (حالياً يمكننا استئجار ٥٠ ساعة اضافية اكثر من ١٥٠ ساعة التى استئأجرت فى الحل الأمثل).

٤- قد يستحق انفاق ٣٠ دولار فى مقابل حق استئجار فدان اضافى من الأرض عند تكلفة ٢٠ دولار للفدان، وقد نستطيع تصور ذلك كتمثيل للكمية التى عندنا الرغبة والقدرة على دفعها للحصول على اختيار نستطيع من خلاله تأجير فدان اضافى بتكلفة قدرها ٢٠دولار .

ويشار الى قيم ($Z_j - C_j$) للمتغيرات غير القاعدية للأنشطة الحقيقية Nonbasic real activities بأنها التكاليف المختزلة reduced costs. وهى تبين كمية الربح (أو التكلفة) للنشاط الذى يجب أن يتغير قبل دخول النشاط غير القاعدى الحالى الى القاعدة Basis (أى ليصير جزءاً من الخطة) . وفى جدول (١-١٣) ، فهناك فقط متغير غير قاعدى لنشاط رئيسى (فول الصويا) . وتبين قيمة($Z_j - C_j$) للخطوة الرابعة أن :

ربحية فدان فول الصويا يتعين عليها الزيادة الى اكثر من ٧دولارات قبل ان يكون الأمر مربحا لتضمين فول الصويا فى الخطة.

عند هذه النقطة علينا نتوقف ونلتقط أنفاسنا. فقد لاحظ القارىء أننا عدلنا المشكلة باضافة أنشطة مستقلة. ففى المثال السابق، قد أضفنا "عمالة مستأجرة" و"أرض مستأجرة" كأنشطة مستقلة . وقد كان التأثير المستهدف لكل منها هو اكتمال مورد عمالتنا ، ومورد أرضنا. وقد سمحنا لأنشطة الذرة وفول الصويا للمنافسة على الأرض والعمالة، و اذا كان الأمر مربحا فيمكن ادراج العمالة المستأجرة التى يمكن الحصول عليها ،وكذلك الأرض الاضافية التى يمكن استئجارها.

هذا ونستطيع تكوين موقف حيث امكانيات استئجار العمالة واستئجار الأرض تتضمن مباشرة فى الأنشطة الأصلية ، فالمشكلة الحالية، فقد نعتبر الآتى:

للذرة

* استئجار الأرض	* استئجار الأرض	* امتلاك الأرض	* امتلاك الأرض
*استئجار ساعات العمالة	*امتلاك ساعات العمالة	*استئجار ساعات العمالة	*امتلاك ساعات العمالة

ويتكرر نفس الشىء بالنسبة لفول الصويا . أى ستوجد أربع طرق لانتاج الذرة و أربع طرق لانتاج فول الصويا . ويبين الجدول (١-١٤) الجدول المبدئى لهذه الأنشطة الثمانية، إلا أنه من السهل رؤية مدى تعقد ذلك الجدول. هذا بالإضافة إلى أنه من السهل ارتكاب خطأ عند تمثيل المشكلة كما نراها فى

الجدول، وكنتيجة لذلك ، ففى هذا المرجع سنعرض مشاكلنا فى صورة أنشطة مستقلة تقام للتعرف على شكل المشكلة .

ويبين الحل الأمثل فى جدول (١- ١٣) أن الأرض هى أكثر الموارد تقييداً . ومن المنطق افتراض أنه اذا كنا نرغب فى دفع إيجار أعلى ، فانه سيمكن الحصول على أرض إضافية . افترض أنه بالإضافة إلى ٤٠ فدان المتاحة عند ٢٠ دولار للفدان ، نستطيع الحصول على ٧٥ فدان اخرى عند ٣٠ دولار للفدان. فلتعديل للمشكلة لوصف هذه الفرصة (ولكنها مقيدة) فان هذا سيحتاج عمودا اضافيا (لوصف ما تستطيع عمله). وجدول (١ –١٥) يبين الجدول المبدئى الجديد الذى سيتضح عندما تضاف الأرض الثانية المستأجرة إلى المشكلة .

ومن الواضح أنه يمكننا إضافة نشاط أو أكثر بلا نهاية حتى تستوفى القيود لها. ومن هنا فنرى أهمية البرمجة الخطية كأداة للإدارة والبحث .

جدول (١-١٤) الجدول المبدئى للتوليفات الممكنة لمشكلة الذرة – فول الصويا ، مع استئجار العمالة والارض كعناصر مقيدة

		أنشطة حقيقية								أنشطة متاحة				مستوى النشاط (RHS)	
		ملكية أرض		استئجار أرض		ملكية الارض		استئجار أرض		أرض	ساعات عمل	أقصى			
		ملكية عمالة	استئجار عمالة	ملكية عمالة	استئجار عمالة	ملكية عمالة	استئجار عمالة	ملكية عمالة	استئجار عمالة			عمالة مستأجرة	أرض مستأجرة		
		للذرة				لفول الصويا									
مخلوط الحل	$C_j \rightarrow$	56	50	36	30	47	43	27	23	0	0	0	0		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	50	الجدول المبدئى
S_2	0	3	0	3	0	2	0	2	0	0	1	0	0	120	
S_3	0	0	3	0	3	0	2	0	2	0	0	1	0	200	
S_4	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	40	
Z_j-C_j		-56	-50	-36	-30	-47	-43	-27	-23	0	0	0	0	$0	

جدول (١-١٥) الجدول المبدئي لمشكلة الذرة – فول الصويا مع عمالة مستأجرة ، وارضين مستأجرتين بايجارين مختلفين

مخلوط الحل		أنشطة حقيقية					أنشطة متاحة					مستوى النشاط
C_j →		56	47	-2	-20	-30	0	0	0	0	0	
		ذرة	فول صويا	عمالة مستأجرة	أرض مستأجرة I	أرض مستأجرة II	أرض	ساعات عمل	أقصى عمالة مستأجرة	أقصى أرض مستأجرة I	أقصى أرض مستأجرة II	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
S_1	0	1	1	0	-1	-1	1	0	0	0	0	50
S_2	0	3	2	-1	0	0	0	1	0	0	0	120
S_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	200
S_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	40
S_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	75
$Z_j - C_j$		-56	-47	2	20	30	0	0	0	0	0	$ 0

تجزئة الأنشطة المركبة

Partitioning Complex Activities

كطريقة أخرى هامة لتعديل البرنامج الخطى نلجأ الى تفتيت الأنشطة المركبة حسب مراحل مكوناتها، وغالبا ما يجرى ذلك كمساعدة فى تعريف المشكلة الأصلية. ولكى نتفهم ذلك سنعيد عرض مشكلتنا الأصلية (جدول ١-٦) ، إذ تتضمن المشكلة نشاطين حقيقيين – زراعة ذرة وزراعة فول الصويا. ولكن فى الواقع، فإن نشاط زراعة الذرة يتكون من زراعته مع توليفات معينة من السماد، الآلات، وعمالة لتعطينا غلة فدانية (فى حالتنا ٧٥ بوشل للفدان). وقد بيعت هذه الكمية (٧٥ بوشل) عند سعر ثابت قدره ١,٢٢ دولار للبوشل لتعطى صافى ايراد قدره ٥٦ دولار للفدان، جدول (١-١)، حينئذ يمكن اعادة عرض مشكلتنا بتقسيم النشاط الأصلى المركب الى نشاطين مبسّطين - زراعة الذرة وبيع الذرة. وبنفس الأسلوب يمكننا عرض كلا من النشاطين. ويبين الجدول (١-١٦) الجدول المبدئى لهذا التقسيم، ونظرا لقيامنا بذلك كنشاطين منفصلين فيجب أن نزودهما بما يربط بينهما . لاحظ أن الجدول المبدئى المبين فى جدول (١-٦) أضيف اليهما صفان، وقد نسمّى الأول "معروض الذرة" والثانى "معروض فول الصويا" ، والغرض منهما هو ايجاد الصلة بين النشاط الحقلى والنشاط البيعى. ويمكن النظر الى هذين الصفين كممثلين لأوعية تخزين. ولما كنا لم نبدأ بأى مخزون فإن هذه الأوعية خالية (أى أن معروض الذرة = صفر، ومعروض فول الصويا = صفر) . فإذا نظرنا الى نشاط زراعة الذرة فى الجدول المبدئى (١-١٦) نجد أن زراعة فدان من الذرة :

١- تستخدم فدانا من الأرض.

٢- تستخدم ٣ ساعات عمل.

٣- تضيف ٧٥ بوشل من الذرة الى وعاء الذرة .

٤- لا تأثير لها على وعاء فول الصويا .

٥- يقلل الربح ٣٥,٥ دولار.

وبفحص العمود الثانى (زراعة فول الصويا) نجد أن فدانه :

١- يستخدم فدانا من الأرض.

٢- يستخدم ٢ ساعة عمل .

٣- لا تأثير له على معروض فول الصويا.

٤- يقلل الربح بمقدار ٢٢ دولار .

جدول (١-١٦) حل السمبلكس لمشكلة الذرة – فول الصويا مع اعتبار الزراعة والبيع نشاطين منفصلين

مخلوط الحل	C_j	أنشطة حقيقية: زراعة: ذرة	زراعة: فول صويا	بيع: ذرة	بيع: فول صويا	أنشطة متاحة: أرض	ساعات عمل	وعاء: ذرة	وعاء: فول صويا	مستوى النشاط (RHS)	
		-35.50	-22.00	1.22	2.30	0	0	0	0		
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	50	الجدول المبدئي
S_2	0	3	2	0	0	0	1	0	0	120	
S_3	0	-75	0	1	0	0	0	1	0	0	
← S_4	0	0	-30	0	(1)	0	0	0	1	0	
Z_j-C_j		35.50	22.00	-1.22	-2.30	0	0	0	0	$ 0.0	
S_1	0	1	(1)	0	0	1	0	0	0	50	الخطوة الثانية
S_2	0	3	2	0	0	0	1	0	0	120	
S_3	0	-75	0	1	0	0	0	1	0	0	
▸ X_4	2.30	0	-30	0	1	0	0	0	1	0	
Z_j-C_j		35.50	-47.00	-1.22	0	0	0	0	2.30	$ 0.0	

تكملة جدول (١-١٦) حل السمبلكس لمشكلة الذرة – فول الصويا مع اعتبار الزراعة والبيع نشاطين منفصلين

→ X_2	-22.00	1	1	0	0	1	0	0	0	50	الخطوة الثالثة
S_2	0	1	0	0	0	-2	1	0	0	20	
S_3	0	-75	0	(1)	0	0	0	1	0	0	
X_4	2.30	30	0	0	1	30	0	0	1	1500	
$Z_j - C_j$		82.5	0	-1.22	0	47.00	0	0	2.30	$ 2350	
X_2	-22.00	1	1	0	0	1	0	0	0	50	الخطوة الرابعة
S_2	0	(1)	0	0	0	-2	1	0	0	20	
→ X_3	1.22	-75	0	1	0	0	0	1	0	0	
X_4	2.30	30	0	0	1	30	0	0	1	1500	
$Z_j - C_j$		-9.00	0	0	0	47.00	.0	1.22	2.30	$ 2500	
X_2	-22.00	0	1	0	0	3	-1	0	0	30	الخطوة الخامسة
→ X_1	-35.50	1	0	0	0	-2	1	0	0	20	
X_3	1.22	0	0	1	0	-150	75	1	0	1500	
X_4	2.30	0	0	0	1	90	-30	0	1	900	
$Z_j - C_j$		0	0	0	0	29	9.00	1.22	2.30	$ 2530	

ويبين العمود التالى أنه لبيع بوشل من الذرة :

١- لا استخدام للأرض.

٢-لا استخدام لساعات العمل .

٣- استخدام بوشل واحد من الذرة من معروضها (وعند هذه النقطة فقيمة المعروض = صفر) .

٤- لا يستخدم فول الصويا .

٥- يضيف ربحا قدره ١,٢٢ دولار .

أما العمود الأخير من الأنشطة الحقيقية فلبيع بوشل من فول الصويا نجد :

١-لا استخدام للأرض.

٢-لا استخدام لساعات العمل .

٣-لا يستخدم ذرة .

٤- استخدام بوشل واحد من معروض فول الصويا.

٥- يضيف ربحا قدره ٢,٣ دولار .

وبالنظر عن قرب الى الجدول المبنى فى الجدول (١-١٦) نجد أننا اذا ضربنا نشاط "بيع الذرة" فى ٧٥ واضافة عناصر هذا العمود لكل عنصر من عمود "زراعة الذرة" فسنحصل على نشاطى زراعة الذرة وبيعها اللتين عرضتا فى جدول (١-٦). وبنفس المقولة إذا أخذنا نشاط "بيع فول الصويا" وضربناه فى ٣٠ واضافة عناصر ذلك العمود الى العناصر المثيلة فى عمود "زراعة فول الصويا" فسنحصل على النشاط المشترك لزراعة وبيع فول الصويا الموجود فى جدول (١-٦). فاذا فعلنا ذلك، فسنلاحظ أن كلا من صف معروض الذرة وصف معروض فول الصويا لهما الآن قيمة صفرية، وتواصل هذه الأنشطة مع بعضها، (كما وضعناها أصلا فى جدول ١-٦) فما زُرع فسيباع.

وكما أعد الجدول (١-٦)، فانه يفاضل بين عمليتى البيع والزراعة. فنستطيع أن نزرع ذرة ولا نبيعه، ونستطيع زراعة فول الصويا ولا نبيعها (وهذا سيسمح لنا بالمرونة فى اضافة أنشطة أخرى قد تستخدم نفس الذرة فى اعلاف الماشية أو تصنيع منتجات الذرة). كما سيسمح لنا ذلك بزراعة الذرة لغرض البيع كحبوب أو لتغذية الحيوانات.

وتبين الخطوة الخامسة الحصول على الحل الأمثل حيث :

١- سنقوم بزراعة ٣٠ فدان من فول الصويا.

٢- سنقوم بزراعة ٢٠ فدان من الذرة

٣- سنقوم ببيع ١٥٠٠ بوشل من الذرة

٤- سنقوم ببيع ٩٠٠ بوشل من فول الصويا

٥- سيتولد ربح قدره ٢٥٠٠ دولار

والميزة الصغيرة التى تتحقق من عرض هذه المشكلة هى أن الحل الأمثل الأصلى (جدول ١-٦) أظهر زراعتنا ٣٠ فدان من فول الصويا و ٢٠ فدان من الذرة. ويبين الحل الجديد المشاهد فى جدول (١-١٦) أننا نزرع هذه المساحات، كما أننا أيضا نبيع ٩٠٠ بوشل من فول الصويا و ١٥٠٠ بوشل من الذرة. وهذا فى الواقع ليس معلومات جديدة بل تظهر لنا كجزء من الحل النهائى primal solution . وفى مواقف أخرى، فانه من المفيد أن يُعرض لنا نموذج البرنامج الخطى المصمم جيدا، وكنتيجة لهذا الحل تظهر مستويات الأنشطة المختلفة التى تتبلور فى النهاية.

وبفحص الصف الأخير ($Z_j - C_j$) من الخطوة الخامسة نجد أن أسعار الظل للموارد فى جدول (١-١٦) هى نفسها التى ظهرت فى جدول (١-٦). فاضافة فدان من الأرض سيكلفنا ٢٩ دولار واضافة ساعة عمالة غير مستغلة سيكلفنا ٩ دولارات. وهناك أسعار الظل المرتبطة بصفوف معروضنا حيث يظهرون الآتى :

١- إضافة بوشل واحد من الذرة ستكون قيمته ١,٢٢ دولار

٢- إضافة بوشل واحد من فول الصويا ستكون قيمته ٢,٣ دولار

وكطريقة أخرى للنظر إلى أسعار الظل لكل من الذرة وفول الصويا المعروضين، هى بدء المشكلة بوجود مخزون مختلف عن الصفر. فإذا عرّفنا مشكلتنا فى الجدول المبدئى (١-١٦) باستثناء أن معروض الذرة له قيمة " ١ " فى عمود مستوى النشاط ، فإن الحل الجديد والنتيجة المثلى هى :

١- زراعة فول الصويا = ٣٠ فدان

٢- زراعة ذرة = ٢٠ فدان

٣- بيع ذرة = ١٥٠١ بوشل

٤- بيع فول الصويا = ٩٠٠ بوشل

٥- إجمالي الربح = ٢٥٣١,٢٢ دولار

وبمعنى آخر فانه اذا تم اجد بوشل واحد فى الوعاء فى بداية المشكلة، فإن حل البرنامج الخطى سيبيعه مع الأشياء الأخرى المنتجة.

استخدام الأنشطة البسيطة فى تحديد وتعريف جوانب المشاكل المركبة

وكما سبق الذكر، فإذا كان الغرض الوحيد من زراعة الذرة هو إعادة بيعه كحبوب ، فلن يكون هناك فائدة حقيقية من تقسيم النشاط إلي أنشطة أخرى كما فى جدول (١-١٦). ويتعرض الجدول (١-١٧) إلى مشكلة جديدة حيث تشمل الأنشطة الحقيقية زراعة الذرة ، زراعة فول الصويا ، شراء الذرة ، التغذية والبيع لقطيع الأبقار . وتسمح لنا هذه المشكلة الأكثر تعقيدا باحتواء الأنشطة التالية:

١- يمكننا زراعة ذرة وبيعه ثانية.

٢- يمكننا زراعة ذرة ، تغذية القطيع ، بيع القطيع.

ولسبب أو لأخر أصبحت معه عمالتنا نادرة بدرجة كافية ، فبدلا من زراعة الذرة الخاص بنا ، يمكننا أن نشتريه ونغذية للقطيع. فقد يمكننا عرض هذه الأنشطة المميزة التي تتضمن كافة الامكانيات كما في فعلنا في جدول (١-١٤) ، ولكن على العكس من ذلك ، نستطيع تهيئة جدول حيث هناك صف معروض الذرة والذى أضفناه هنا والذى يسمح لنا بادخال نشاط تغذية القطيع وبيع الذرة لتنافس على الأرض والعمالة من خلال معروض الذرة وبالتالى من خلال نشاط زراعة الذرة ، وبهذا يكون لدينا أسلوب أكثر قوة فى اختبار مشكلتنا .

وللجدول (١-١٧) نفس الصفوف التى فى الجدول (١-١٦) مثل الأرض ، العمالة ، معروض الذرة ، معروض فول الصويا ، ($Z_j - C_j$) ، كما يحتوى أيضا الجدول (١-١٧) على نفس الأنشطة الحقيقية التى تواجدت فى الجدول (١-١٦) (مثل زراعة الذرة ، زراعة فول الصويا ، بيع الذرة ، بيع فول الصويا) . وبالاضافة الى ذلك هناك نشاطان جديدان :

١- شراء الذرة و ٢- تغذية وبيع رأس واحدة من القطيع

(ويبين الجدول (١-١٨) تفصيلات عن إنتاج القطيع تحت الظروف الجافة drylot condition أى بدون زراعة أعلاف) .

جدول (١-١٨) معاملات الإنتاج لتغذية قطيع الأبقار (أي بدون زراعة أعلاف)

١٣٠ يوم فترة تغذية- زيادة ٣٠٠ رطل

الاحتياجات المادية لكل رأس:

١- ٠,١ فدان من الأرض.
٢- ٣ ساعة عمالة.
٣- ٤٠ بوشل من الذرة.

المدخلات المشتراة :

١- عجل ذكر وزن ٩٠٠ رطل (درجة جيدة بسعر ٠,٢٤ دولار للرطل) = ٢١٦,٠٠ دولار
٢- مدخلات أخرى. = ٢٧,٠٠ دولار

الربح عن كل رأس:

بيع عجل ذكر زنة ١٢٠٠ رطل (درجة ممتازة بسعر ٠,٢٧ دولار للرطل) = ٣٢٤,٠٠ دولار
منقوصاً منها نفقات نقدية = ٢٤٣,٠٠ دولار
صافى الربح = ٨١,٠٠ دولار

جدول(١-١٧) حل السمبلكس للمشكلة حيث تغذية القطيع وبيع الذرة تتنافس مع زراعة الذرة

		أنشطة حقيقية						أنشطة متاحة					
		زراعة ذرة	زراعة فول صويا	بيع ذرة	بيع فول صويا	شراء ذرة	بيع قطيع	أرض	ساعات عمل	وعاء ذرة	وعاء فول صويا	مستوى النشاط RHS	
مخلوط الحل	C_j	-35.50	-22.00	1.22	2.30	-1.25	81.00	0	0	0	0		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	0	1	1	0	0	0	0.1	1	0	0	0	50	الجدول المبدئي
S_2	0	3	2	0	0	0	3	0	1	0	0	120	
← S_3	0	-75	0	1	0	-1	(40)	0	0	1	0	0	
S_4	0	0	-30	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$Z_j - C_j$		35.50	22.00	-1.22	-2.30	1.25	-81	0	0	0	0	$ 0.0	
S_1		1.185	1	-0.0025	0	0.0025	0	0	0	-0.0025	0	50	الخطوة الثانية
S_2		(8.625)	2	-0.075	0	0.075	0	0	1	-0.075	0	120	
→ X_6		-1.875	0	0.025	0	-0.025	1	0	0	0.025	0	0	
S_4		0	-30	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$Z_j - C_j$		-116.38	22.00	0.805	-2.30	0.775	0	0	0	2.025	0	$ 0.0	

52

تكملة جدول (١-١٧) حل السمبلكس للمشكلة حيث تغذية القطيع وبيع الذرة تتنافس مع زراعة الذرة

S_1	0	-7246	0.0078	0	-0.0078	0	1	-0.1376	0.0078	0	33.4783	الخطوة الثالثة
→ X_1	1	0.2319	-0.0087	0	0.0087	0	0	0.1159	-0.0087	0	13.9130	
X_6	0	0.4348	0.0087	0	-0.0087	1	0	0.2173	0.0087	0	26.087	
S_4	0	-30	0	(1)	0	0	0	0	0	1	0	
$Z_j - C_j$	0	48.9874	-0.2075	-2.30	0.2375	0	0	13.4879	1.0125	0	$ 1619.1254	
S_1	0	(0.7246)	0.0078	0	-0.0078	0	1	-0.1376	0.0078	0	33.4783	الخطوة الرابعة
X_1	1	0.2319	-0.0087	0	0.0087	0	0	0.1159	-0.0087	0	13.9130	
X_6	0	0.4348	0.0087	0	-0.0087	1	0	0.2173	0.0087	0	26.047	
→ X_4	0	-30	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$Z_j - C_j$	0	-20.0126	-0.2075	0	0.2375	0	0	13.4879	1.0125	2.30	$ 1619.1254	
→ X_2	0	1	0.0108	0	-0.0108	0	1.3801	-0.1899	0.0108	0	46.2025	الخطوة الخامسة
X_1	1	0	-0.0112	0	0.0112	0	-0.3200	0.1599	-0.0112	0	3.1986	
X_6	0	0	0.0040	0	-0.0040	1	-0.6001	0.2999	0.0040	0	5.9982	
X_4	0	0	0.324	1	-.324	1	41.4030	-5.697	0.324	1	1386.075	
$Z_j - C_j$	0	0	.0086	0	0.0214	0	27.6194	9.6875	1.2286	2.30	$ 2543.7576	

وفى الجدول(١-١٧) يشير نشاط "شراء الذرة" إلى أن شراء بوشل من الذرة:

١- لا يستخدم أرضاً.

٢- لا يستخدم عمالة.

٣- يضيف بوشلاً واحداً إلى معروض الذرة.

٤- لا تأثير له على معروض فول الصويا.

٥- يقلل الربح بمقدار ١,٢٥ دولار.

كما يتضح أن بيع بوشل من الذرة يغل قيمة قدرها ١,٢٢ دولار بينما شراء بوشل منه يتكلف ١,٢٥ دولار ،ويمكن أن يعزى ذلك إلى تكلفة عملية البيع . ويرجع السبب الحقيقى وراء هذا الفرق هو تفادى الحل غير الحدودى Unbounded Solution . فإذا أمكن تحقيق ولو جزء من السنت (الدولار = ١٠٠ سنت) كأربحية من خلال شراء وإعادة بيع الذرة ، فإن البرنامج الخطى سيحدد ربحاً بلا نهاية حيث لا يوجد أى قيد على أنشطة شراء أو بيع الذرة. وقد عرض ذلك بإختلاف طفيف فى جدول (١-٦).

ويبين العمود السادس (القطيع) من جدول (١-١٧) المعاملات المستخدمة فى جدول (١-١٨) بطريقة تناسب البرنامج الخطى. ويشير ذلك العمود إلى أن شراء ، تغذية، بيع عجل واحد:

١- يستخدم ٠,١ فدان من الارض.

٢- يستخدم ٣ ساعات عمالة.

٣- يستخدم ٤٠ بوشل ذرة .

٤- لا يستخدم أى بوشلات من فول الصويا.

٥- زيادة الربح بمقدار ٨١ دولار.

ويشير نشاط" زراعة الذرة" فى الخطوة الثانية إلى انه أكثر قيم ($Z_j - C_j$) سلبية. وبقراءة معاملات هذا العمود يتبين أن زراعة فدان واحد من الذرة:

١- سيستخدم ١,١٨٧٥ فدان من الأرض.

٢- سيستخدم ٨,٦٢٥ ساعة عمالة.

٣- يزيد انتاج القطيع بمقدار ١,٨٧٥ رأس.

٤- لا تأثير له على وعاء فول الصويا.

٥- يزيد الربح بمقدار ١١٦,٣٧٥ دولار.

فزراعة فدان من الذرة يستخدم ١,١٨٧٥ فدان من الارض لأن كل فدان ذرة مزروع سيسمح

بتغذية ١,٨٧٥ رأس ماشية (١,٨٧٥ رأس للفدان) = $\frac{\text{٧٥ بوشل للفدان}}{\text{٤٠ بوشل للرأس}}$

وكل رأس تحتاج ٠,١ فدان من الارض . فيكون مجموع الاراضى المستخدمة ١,١٨٧٥ (فدان واحد لزراعة الذرة و ٠,١٨٧٥ فدان لرأس الماشية التى ستتغذى على الذرة المزروع على فدان واحد من الارض).

ويظهر الحل الامثل فى الخطوة الخامسة. والحل النهائى Primal Solution معطى فى عمود مستوى النشاط للخطوة الخامسة. ويتضح لنا انه يجب:

١- زراعة ٤٦,٢٠٢٥ فدان فول صويا.

٢- زراعة ٣,١٩٨٦ فدان ذرة.

٣- تغذية وبيع ٥,٩٩٨٢ رأس من الماشية.

٤- بيع ١٣٨٦,٠٧٥ بوشل من فول الصويا.

٥- تحقيق أرباح قدرها ٢٥٤٣,٧٥٧٦ دولار.

ويظهر الحل المثالى احدى نقاط ضعف البرامج الخطية. وحيث أن الفرض الرياضى به أن كل شىء قابل للتجزئة اللانهائية ، فلا مشاكل فى الحل الذى يدعو إلى ٥,٩٩٨٢ راس ماشية . فمن الواضح أننا سنقوم بإختيار إما ٥ أو ٦ وفى هذه الحالة فالتقريب سيكون إلى ٦. وفى الاحوال التى سيسبب التقريب فيها صعوبات فيجب استخدام البرامج الكاملة Integer Programming .

* * *

الباب الثاني

تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

هذا التحليل ينقسم إلى شقين:

١- تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية

٢- الازدواجية فى البرمجة الخطية

وفيما يلى عرض للشق الاول :

تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية

مقدمة

فى الباب السابق، درسنا كيفية صياغة مشاكل البرمجة الخطية وكيفية الوصول إلى الحلول المثلى باستخدام الأشكال البيانية وأسلوب السمبلكس ، و لكن لم نتعرض إلى أهم الاهتمامات من وجهة النظر الإدارية. فأولا ، تحليل الحساسية ، يؤكد أن الإدارة تعمل فى بيئة دائمة الحركة، وهذا يعنى أن التكاليف والأسعار تتغير، وأن الموارد تنفد أو تصبح متاحة عما فى الماضى ، وأن التقدم التقنى يؤثر فى أداء العملية الانتاجية ويعنى ذلك ان الشركة التى تستخدم البرمجة الخطية يجب أن تتحرى حساسية الحل الأمثل للتغيرات فى البيانات التى استخدمها فى بناء النموذج .

هذا فمعالجة اى برنامج خطى لن يصبح كاملا دون مناقشة استخدام الحاسوبات الآلية لحل المشاكل . فالمشاكل التى ركبّناها، ممكن بالحسابات الجدية المطولة أحيانا أن تُحل باليد بإتباع خطوات أسلوب السمبلكس . وفى الحقيقة ، فإنه من الأهمية بمكان أن ندرك ونتفهم كيفية تشغيل الحاسوبات . وعندما نُستوعب آليات اسلوب السمبلكس، فإنه سيكون من غير الضرورى المعاناة بالطريقة اليدوية، إذ يتواجد الكثير من البرامج الخطية المتاحة، وسنعرض بعض مطبوعاتها فيما يختص بتحليل الحساسية.

وقد تواجدت الحلول المثلى لمشاكل البرمجة الخطية حتى الآن فى ظل افتراضات محددة deterministic assumptions. ويعنى ذلك افتراضنا لمعلومات كاملة مؤكدة بما فى ذلك العلاقات الخاصة، أى الأسعار ثابتة، الموارد معروفة، الوقت اللازم لإنتاج الوحدة معلوم بالضبط . ولكن فى دنيا الواقع، فالأحوال فى حركة دائمة ومتغيرة، فكيف نستطيع تناول هذه المفارقة الظاهرة. الطريق لذلك هو الاستمرار فى معالجة كل مشكلة من البرمجة الخطية كموقف محدد. وعلى كل فبوصولنا إلى حل أمثل، نتعرف على أهمية رؤية إلى أى مدى حساسية الحل لفروض النموذج وبياناته. فمثلا، إذا تبين لمؤسسة ما أن الربح للوحدة لم يكن ٥ جنيهات كما قدر له ولكن كان أقرب إلى ٥,٥ جنيه، فكيف

سيتغير الحل الأمثل والربح الإجمالى؟ وإذا أصبحت موارد إضافية مثل عشرة ساعات عمالة أو ثلاثة ساعات من وقت الآلات- متاحة، فهل سيغير ذلك من الإجابة لحل المشكلة. تُستخدم هذه التحليلات فى اختبار آثار هذه التحليلات فى محاولات ثلاث :

١- معدلات الاسهام Contribution rates (C_j 's) لكل متغير.

٢- المعاملات الفنية (الأرقام فى معادلات القيود).

٣- الموارد المتاحة (الكميات فى جانب المعادلات). وهذه التحليلات تتبادل فى أسمائها ما بين تحليل الحساسية Sensitivity analysis , Parametric programming , Optimality analysis . Postoptimality

واستخدام الإدارة لهذه التحليلات غالباً ما يتركز على سلسلة من الأسئلة من النوع ماذا لو زاد ربح الوحدة المنتجة بمقدار ١٠% ؟ ماذا لو توفرت أموال أقل من ميزانية الاعلان؟ ماذا لو مكث كل عامل ساعة واحدة أطول كل يوم بأجر اضافى قدره ١,٥ مرة حتى تزيد الطاقة الإنتاجية. فهنا نرى أن تحليل الحساسية يُستخدم ليس فقط فى التعامل مع أخطاء تقدير معالم المدخلات فى نموذج البرمجة الخطية بل أيضاً فى تجارب الإدارة مع التغيرات الممكنة مستقبلاً فى المؤسسة والتى قد تؤثر على الأرباح.

وهناك مدخلات لتحديد كيفية حساسية الحل للتغير، الأول ببساطة هو عن طريق المحاولة والخطأ، وهذا يتضمن إعادة حل المشكلة برمتها، مؤملاً بالحاسوب الآلى، و قد يأخذ ذلك مدة طويلة للإختبارات المتتالية. أما المدخل الآخر ونفضله فهو طريقة Postoptimality ، فبعد الوصول إلى الحل الامثل، نحاول تحديد المدى لتغير معالم المشكلة التى لن تؤثر فى الحل الأمثل أو تغير المتغيرات فى القاعدة(مخلوط الحل basis) ، ويجرى ذلك بدون إعادة حل المشكلة برمتها.

مـــثال :

تقوم شركة طنطا للصوتيات بتصنيع أجهزة التسجيل ذات الصوت المجسم، وأجهزة الاستقبال المجسمة. وتحتاج كل من هذه الأجهزة لعدد معين أسبوعيا من الفنيين المهرة والمحدودين عرضهما. وتشكل الشركة حلاً للبرمجة الخطية لتحديد أمثل انتاج من كل X_1 (اجهزة التسجيل)، X_2 (أجهزة الاستقبال):

Maximize profit = £ 50 X_1 + £ 120 X_2

Subject to :		
	$2X_1 + 4X_2 \leq 80$	الساعات المتاحة من وقت الكهربائيين
	$3X_1 + 1X_2 \leq 60$	الساعات المتاحة من وقت الفنيين السمعيين
	$X_1 + X_2 \geq 0$	

التغيرات فى معاملات دالة الهدف

دعنا نعتبر الحل النهائى للسمبلكس والمعروض فى الجدول (٢-١) حيث الحل الأمثل كالآتى:

$X_2 =$ ٢٠ جهاز استقبال		متغيرات قاعدية Basic variables
$S_2 =$ ٤٠ ساعة زائدة من وقت الفنيين السمعيين (audio technicians)		
$X_1 =$ صفر جهاز تسجيل		متغيرات غير قاعدية Nonbasic variables
$S_1 =$ صفر ساعة زائدة من وقت الكهربائيين (electricians)		

والمتغيرات القاعدية هى التى تظهر فى مخلوط الحل، والمتغيرات غير القاعدية (التى تساوى صفرا) يجب تناولها بأسلوب مختلف عند تحليل الحساسية.

جدول (٢-١) الحل الأمثل بأسلوب السمبلكس

مخلوط الحل	C_j	£ 50 X_1	£ 120 X_2	£ 0 S_1	£ 0 S_2	Quantity
X_2	120	1/2	1	1/4	0	20
S_2	0	5/2	0	-1/4	1	40
Z_j		60	120	30	0	
$C_j - Z_j$		-10	0	-30	0	£ 2400

المعاملات غير القاعدية فى دالة الهدف

Nonbasic Objective Function Coefficients

وهنا هدفنا البحث عن مدى حساسية الحل الأمثل للتغيرات فى المعاملات التى ليست حاليا فى مخلوط الحل Basic (S_1, X_1). أى إلى مدى يمكن أن تتغير معاملات دالة الهدف قبل دخول X_1 أو S_1 لمخلوط الحل والإحلال محل المتغيرات القاعدية؟

يمكن الحل فى صف $(C_j - Z_j)$ من الحل النهائى فى جدول (٢-١)، وحيث أن المشكلة هى مشكلة تعظيم، فالقاعدة Basic لن تتغير ما لم تصبح $(C_j - Z_j)$ لقيمة واحد من المتغيرات غير القاعدية – موجبة. لذلك فقيم C_j لـ X_1 , S_1 التى لن تغير الحل الامثل هى:

$$C_j - Z_j \leq 0$$

وبطريقة أخرى اى

$$C_j \leq Z_j$$

ولما كانت C_j للمتغير X_1 هى ٥٠ جنيها وأن Z_j له هى ٦٠ جنيها، فالحل يكون أمثلا طالما أن ربح الوحدة لجهاز التسجيل لا يزيد عن ٦٠ جنيها، أى لا يزيد عن مقدار قدره ١٠ جنيهات. وبالمثل ،

فمساهمة الوحدة من S_1 (لكل ساعة من وقت الكهربائيين) يمكن أن تزيد من الصفر حتى ٣٠ جنيها بدون تغير فى مخلوط الحل الحالى.

وفى كلتا الحالتين، فيمكن تعظيم دالة الهدف بزيادة قيمة C_j إلى قيمة لا تتعدى قيمة Z_j ، ويمكن أيضا تقليل قيمة C_j لمتغير غير قاعدى إلى سالب ما لا نهاية (∞ -) بدون التأثير على الحل . ويسمى المدى للمتغير C_j مدى عدم الجوهرية range of insignificance للمتغيرات غير القاعدية.

$$-\infty \leq C_j \text{ (for } X_1) \leq £\, 60$$

$$-\infty \leq C_j \text{ (for } S_1) \leq £\, 30$$

المتغيرات القاعدية فى دالة الهدف

Basic Objective Function coefficients

وينصب تحليل الحساسية هنا على المتغيرات القاعدية فى مخلوط الحل . وسابقا كانت التغيرات تؤثر فقط على$(C_j\text{-}Z_j)$ للمتغير. ولكن فى حالتنا الحالية فإن تغيرا فى الربح أو التكلفة لمتغير قاعدى يمكن أن يؤثر على كل قيم $(C_j\text{-}Z_j)$ للمتغيرات غير القاعدية.

دعنا نفترض حدوث تغير فى ربحية الوحدة من أجهزة الاستقبال (X_2)، هذا المعامل حاليا فى دالة الهدف قدره ١٢٠ جنيها. وسنشير إلى التغير فى تلك القيمة بالعلامة دلتا (Δ)الإغريقية. وسنعيد عرض الجدول النهائى للحل الامثل (الذى ذكر فى الجدول السابق) ونرى نتائجه كما فى الجدول (٢-٢).

جدول (٢-٢) التغير فى ربحية الوحدة من أجهزة الاستقبال المجسمة

مخلوط الحل	C_j	50	120 + Δ	0	0	Quantity
		X_1	X_2	S_1	S_2	
X_2	£ 120 + Δ	½	1	¼	0	20
S_2	£ 0	5/2	0	-1/4	1	40
Z_j		60+1/2 Δ	120 + Δ	30+1/4 Δ	0	
$C_j\text{-}Z_j$		-10-1/2 Δ	0	-30 –1/4 Δ	0	£ 2400 + 20 Δ

لاحظ القيم الجديدة فى هذا الجدول للمتغيرات غير القاعدية X_1 , S_1 حيث أصبحت C_j للمتغير X_2 هى (120 +Δ) .

ومرة اخرى ، نتعرف على أن الحل الأمثل الحالى سيتغير فقط إذا كانت قيمة واحد أو أكثر من صف $(C_j\text{-}Z_j)$ ستصبح اكبر من الصفر. فالسؤال ، كيف ستتغير قيمة Δ لكى تبقى كل $(C_j\text{-}Z_j)$ الجديدة موجبة ؟ ولكى نجد ذلك علينا أن نجد قيمة Δ فى كل عمود.

فللعمود x_1

$$-10-1/2\ \Delta \leq 0$$

$$-10 \leq 1/2\ \Delta$$

$$-20 \leq \Delta \quad Or\ \Delta \geq 20$$

وهذا يعنى أن الحل الأمثل لن يتغير ما لم تقل ربحية x_2 على الأقل ب ٢٠ جنيها ، وهو تغير فى Δ بمقدار (-٢٠ جنيها). وبالتالى، ولن يدخل المتغير X_1 الحل القاعدى ما لم تنقص ربحية الوحدة من أجهزة الاستقبال من ١٢٠ جنيها إلى ١٠٠ جنيها أو أقل.

والآن نختبر عمود S_1 :

$$-30-\ 1/4\ \Delta \leq 0$$

$$-30 \leq 1/4\ \Delta$$

$$-120 \leq \Delta\ \ Or\ \ \Delta \geq -120$$

وهذا يعنى أن S_1 أقل حساسية للتغير عن x_1 ولن يدخل القاعدة **Basiss** ما لم تنخفض ربحية وحدة X_2 من ١٢٠ جنيه إلى الصفر.

المدى للحل الامثل

ولما كانت الغير متساوية الاولى أكثر فاعلية، فنستطيع القول بأن المدى لربح الوحدة من X_2 تكون كالآتى:

$$£\ 100 \leq C_J\ (For\ X_2) \leq \infty$$

ولطالما أن ربح الوحدة من جهاز الاستقبال يكون أكبر من أو يساوى ١٠٠ جنيه فإن مخلوط الحل الحالى من X_2 = ٢٠ جهاز استقبال، X_1 = صفر جهاز تسجيل، سيكون الأمثل.

وفى تحليل المشاكل الكبرى، فإن هذه الطريقة تساعدنا فى تجنب عمليات الوقت المنصرم فى كل مرة يحدث فيها تغير صغير. وعلى وجه العموم، فبالطبع ستتغير الأرباح إذا زادت أو نقصت معاملات الربح، ولكن هذه الحسابات تكون سريعة وسهل القيام بها.

التغيرات فى المعاملات الفنية

وتعكس هذه التغيرات المستوى التكنولوجى القائم. فإذا زادت أو قلت الموارد اللازمة لإنتاج سلعة مثل أجهزة التسجيل أو أجهزة الاستقبال، فإن المعاملات فى معادلات القيود ستتغير. ولكن هذه التغيرات لا تأثير لها على دالة الهدف لمشكلة البرمجة الخطية، بل يمكنها إنتاج تغير جوهرى فى شكل منطقة الحل الممكن، وبالتالى الربح أو التكلفة المثلى. وتحليل الحساسية لهذه المعاملات الفنية تخرج عن إطار هذا الكتاب فى الوقت الحاضر.

التغيرات فى الموارد أو قيم الجانب الأيمن من القيود

تعتبر القيم فى الجانب الأيمن من القيود ممثلة للموارد المتاحة للمؤسسة. فقد تكون هذه الموارد هى ساعات العمالة أو وقت الآلات المتاح، أو أموال، أو مواد الانتاج المتاحة. فالمعرفة لمدى حساسية الحل الامثل للتغيرات فى الموارد تعتبر هامة للأحوال الديناميكية للسوق. وينتج عن التغير فى قيم الجانب الأيمن من القيود، تغيرات فى منطقة الحل الممكن، وغالبا ما يمتد إلى الحل الامثل.

أسعار الظل

تمدنا المعرفة للموارد الإضافية بمعلومات إدارية قيّمة ،وتتواجد عند النظر إلى الحل النهائى الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية. وخاصية هامة لصف (C_j-Z_j) هى سالبية الأرقام فى أعمدة المتغيرات الزائدة Slack حيث تمدنا بما يسمى بأسعار الظل. ويُعرّف سعر الظل بأنه القيمة التى تزيد عن التكلفة القياسية الناتجة عن استخدام وحدة واحدة من المورد بإتاحة استخدام ساعة اضافية من وقت الآلات أو وقت العمالة أو أى مورد آخر متاح.

فبالرجوع إلى جدول(٢-١) والخاص بالحل الأمثل لمشكلة شركة طنطا للصوتيات، فإن المؤسسة بسبيلها إلى توظيف عامل كهربائى اضافى بعض الوقت، ولنقل أن التكلفة هى ٢٢ جنيهاً \ ساعة ممثلة للأجور والمزايا الاضافية لتوظيف العامل بالشركة، فهل ستفعل الشركة ذلك؟ الجواب بنعم، فسعر الظل لوقت العامل الكهربائى هو ٣٠ جنيهاً. وبهذا تحقق الشركة صافيا قدره ٨ جنيهات (أى٣٠-٢٢ جنيها) لكل ساعة عمل له فى العملية الإنتاجية.

وهل تفكر الشركة فى توظيف فنى سمعى بعض الوقت بمعدل ١٤ جنيها \ ساعة. فالاجابة بالنفى، فسعر الظل له هو صفر، ويتضمن لا زيادة فى دالة الهدف باستئجار المزيد من المورد الثانى المتاح. لماذا؟ لأن ليس كل المورد مستخدم حالياً ٤٠ ساعة ما زالت متاحة، إذ من الصعب الاتفاق لشراء مزيد من هذا العنصر.

المدى لقيم الجانب الأيمن من القيود

إذا استوعبنا وحسبنا سعر الظل للساعة الإضافية لعامل الكهرباء (٣٠ جنيها) فسنرغب فى تحديد عدد الساعات الممكن استخدامها لزيادة الأرباح. وتحت مظلة البرمجة الخطية، فهذه العملية تتضمن البحث عن المدى الذى ستبقى فيه أسعار الظل سارية. فالمدى لقيود الجانب الأيمن RHS يدلنا على عدد الساعات التى يمكن للشركة إضافتها أو إزالتها من قسم العمالة الكهربائية مع بقاء سعر الظل ٣٠ جنيها.

وتقدير المدى يشابه عملية السمبلكس فى تحديدها للصف المحورى،أى أقل نسبة للمتغير الجديد. فعمود S_1 وكمياته من الجدول (٢-١) أعيد تكراره كما يلى، بالنسبتين الموجبة و السالبة:

S_1	الكمية	النسبة (Ratio)
1/4	20	20 / (1/4) = 80
- 1/2	40	40 / (-1/4) = -160

فأصغر نسبة موجبة (٨٠ فى مثالنا) تدلنا على عدد الساعات للعمالة الكهربائية كمورد يمكن تقليله بدون تغيير الحل الأمثل الحالى. وبالتالى ، يمكننا تقليل مورد الجانب الايمن بكمية كبيرة قدرها ٨٠ ساعة – أساسا من عدد ٨٠ ساعة الحالية إلى آخر دقيقة فيها لتكون صفر ساعة – بدون أن تسبب فى ازاحة متغير قاعدى من الحل.

وتدلنا النسبة السالبة (-١٦٠) عن عدد الساعات التى يمكن اضافتها إلى المورد قبل تغير مخلوط الحل. فى هذه الحالة، قد تزيد ساعات العمالة الكهربائية بمقدار ١٦٠ ساعة حتى ٢٤٠ ساعة (أى ٨٠ حاليا + ١٦٠ ممكن إضافتها). فالآن قد أرسينا مدى ساعات العمالة الكهربائية التى يكون سعر الظل لها ٣٠ جنيه ما زال قائماً. هذا المدى هو ما بين صفر إلى ٢٤٠ ساعة ($0 \le S_1 \le 240$) .

أما مُورِّد المورد السمعى الفنى فهو مختلف قليلاً إذا أن كل ٦٠ ساعة من الوقت المخصص والمتاح لم تستخدم. (لاحظ أن S_2 = ٤٠ ساعة كما فى الجدول (٢-١) ، فإذا طبقنا اختبار النسب ، فنرى أنه يمكننا تقليل عدد الساعات لتلك العمالة بمقدار ٤٠ ساعة فقط قبل حدوث قصور. ولكن نظراً لعدم استخدام كل الساعات المتاحة حاليا، فإننا نستطيع زيادتهم إلى ما لا نهاية بدون تغيير حل المشكلة. لذلك فالمدى لهذا سعر الظل سيكون من ٢٠ (أى ٦٠-٤٠) ساعة إلى حد أعلى غير محدود ($20 \le S_2 \le \infty$) ، ومعظم البرامج الخطية المستخدمة فى الشركات والجامعات تضم تحليل الحساسية كاختيار .

الازدواجية فى البرمجة الخطية

The Duual

مقدمـــة

لكل مشكلة برمجة خطية مشكلة مصاحبة لها تسمى dual . وتسمى الطريقة الاولى لعرض البرنامج الخطى بالأوّلية **the primal** ، أما الطريقة الثانية لعرض نفس المشكلة فتسمى the dual . ويتكافأ كلا الحلين ، ولكنهما يشتقان بأساليب بديلة.

وتحتوى الازدواجية **the dual** على معلومات اقتصادية ذات فائدة لدى الادارة، وقد يكون سهلا فى الحل،أى أقل فى عدد العمليات الحسابية عن المشكلة الأوّلية the primal. وعموما إذا تضمن البرنامج الخطى الأوّلى تعظيم دالة الربح بفرض قيود من النوع أقل من أو تساوى إلى قيود المورد، فالبرنامج الإزدواجى the dual سيتضمن تدنية تكلفة الفرصة البديلة بفرض قيد من النوع أقل من أو أكبر من أو

تساوى قيد دالة الهدف الربحية. وبعد اعادة عرض المشكلة من الأولّية إلى الازدواجية ، فإجراءات الحل تكون بالضبط مثل أى مشكلة برمجة خطية.

ولنستعرض الآن العلاقة الأولّية – الازدواجية بالنسبة لمثلنا المذكور فى تحليل الحساسية وأجهزة التسجيل (X_1) وأجهزة الاستقبال (X_2) لتعظيم الربح.

Maximize profit	$= £\ 50\ X1 + £\ 120\ X_2$	
Subject to:	$2\ X1 + \quad 4\ X_2 \ \leq\ 80$	الساعات المتاحة من وقت الكهربائيين
	$3\ X_1 + \quad 1\ X_2 \ \leq\ 120$	الساعات المتاحة من وقت الفنيين السمعيين

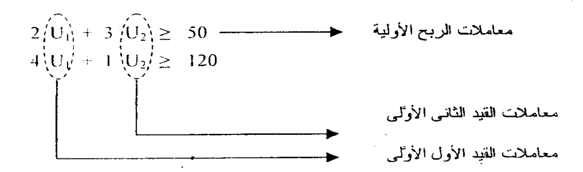
فالازدواجية لهذه المشكلة دالة هدفها تدنية الفرصة البديلة من عدم استخدام الموارد بالطريقة المثلى. وسنسمى هذه المتغيرات التى ستحاول الحل ب U_1 , U_2 . وتمثل U_1 الساعات الكامنة التى يمكن أن يساهم بها وقت الكهربائيين، وفى كلمات أخرى قيمة الازدواج لساعات من مورد resource وقت الكهربائين. كما تمثل U_2 قيمة الازدواج من مورد وقت الفنيين السمعيين.

والكميات من الجانب الأيمن لقيود البرنامج الأولّى تصبح معاملات دالة الهدف الازدواجية. وتمثل إجمالي التكلفة البديلة فى تدنيتها باستخدام الدالة ($80\ U_1 + 120\ U_2$) المسماة:

(Minimize opportunity cost = $80\ U_1 + 120\ U_2$)

وتتألف قيود الازدواج المقابلة من تحوير معاملات القيود الأولّية، مع ملاحظة أنه إذا كانت القيود الأولّية من النوع أقل من ($\leq$) فهى فى الازدواج من النوع ($\geq$). فعلى سبيل المثال، فتحوير مجموعة الأرقام $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

ففى حالة التحوير للمعاملات الأولية $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فالنتيجة هى $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. ويرجع فى ذلك إلى موضوعات المصفوفات والمحددات.



ولننظر الآن إلى معنى قيود الازدواجية . ففى غير المتساوية الأولى، فالكمية للجانب الأيمن من القيد (٥٠ جنيها) هو الدخل من بيع جهاز تسجيل واحد. والمعاملات U_1 و U_2 هى الكميات من كل مورد نادر (وقت الكهربائى ووقت الفنى السمعى) التى يحتاجها انتاج جهاز تسجيل، بمعنى ساعتين من وقت الكهربائى، وثلاث ساعات من وقت الفنى السمعى. وتعبر هذه المتساوية عن أن القيمة الكلية المحتملة للعناصر النادرة التى يحتاجها انتاج وحدة واحدة من أجهزة التسجيل يجب على الأقل ألا تقل عن الربح المشتق من الناتج. ويعبر القيد الثانى بالمماثلة عما يحتاجه من وقت الموارد المحدودة لانتاج وحدة واحدة من أجهزة الاستقبال.

اجراءات تشكيل الازدواجية

يمكن تلخيص آليات تشكيل الازداجية من البرمجة الخطية الأوّلية، فيما يلى:

١ - إذا كان الهدف الأوّلى primal هو التعظيم ففى الازدواج هو التدنية ، والعكس صحيح.

٢ - قيود الجانب الأيمن من الأوّلى تصبح معاملات دالة الهدف فى الازدواجية.

٣ - معاملات دالة الهدف فى الأوّلى تصبح قيود الجانب الايمن فى الازدواجية.

٤ - تحوير معاملات القيود الأوّلية تصبح معاملات قيود الازدواجية.

٥ - قيود غير المتساويات تصبح منعكسة ،(فإذا كان القيد الأوّلى من نوع المتساوية فإنه يصبح بدون قيد محدد فى حالة الازدواجية)

حل الازدواجية فى المثال السابق :

Minimize opportunity cost = $80 U_1 + 60 U_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + Ma_1 + Ma_2$

Subject to :

$$2 U_1 + 3 U_2 - 1 S_1 + a_1 = 50$$

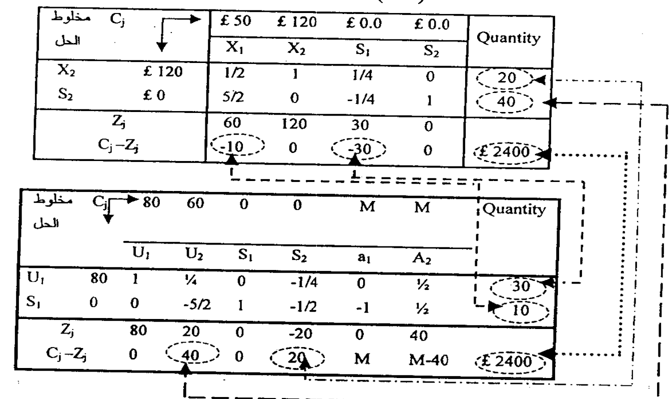
$$4 U_1 + 1 U_2 - 1 S_2 + a_2 = 120$$

جدول (٢-٣) الجدول المبدئى للحل الممكن بطريقة الازدواج

C_j → ↓		80	60	0	0	M	M	Quantity
		U_1	U_2	S_1	S_2	a_1	a_2	
a_1	M	2	3	-1	0	1	0	50
a_2	M	4	1	0	-1	0	1	120
Z_j		6M	4M	-M	-M	M	M	
$C_j - Z_j$		80-6M	60-4M	M	M	0	0	170M

وبمقارنة الحل النهائى الامثل الأوّلى كقيم مطلقة للأرقام فى صف ($C_j - Z_j$) تحت عمود المتغيرات المتاحة Slack variables فإنها تمثل الحلول لمشكلة الازدواج أى الحل الامثل لـ U_i 'S ، كما يتبين من الشكل (٢-١).

شكل (٢-١) الحل الأمثل Primal Solution



مخلوط الحل	C_j	£ 50	£ 120	£ 0.0	£ 0.0	Quantity
		X_1	X_2	S_1	S_2	
X_2	£ 120	1/2	1	1/4	0	20
S_2	£ 0	5/2	0	-1/4	1	40
Z_j		60	120	30	0	
C_j-Z_j		-10	0	-30	0	£ 2400

الحل الأمثل بالازدواجية

مخلوط الحل	C_j	80	60	0	0	M	M	Quantity
		U_1	U_2	S_1	S_2	a_1	A_2	
U_1	80	1	¼	0	-1/4	0	½	30
S_1	0	0	-5/2	1	-1/2	-1	½	10
Z_j		80	20	0	-20	0	40	
C_j-Z_j		0	40	0	20	M	M-40	£ 2400

المميزات الحسابية لطريقة الازدواج

ذكرنا فى بداية هذا الجزء سهولة حساباته عن الطريقة الأولية. وفى ختامنا لهذا الجزء سنستعرض سريعاً لمثال لتوضيح هذه الميزة.

قد تأخذ المشكلة التالية بالطريقة الأولية عدة جداول حل ممكنة للوصول إلى الحل الأمثل.

Maximize profit = £ 3 X_1 + £ 4 X_2 + £ 2X_3

Subject to :

$$X_1 + X_2 \le 8$$
$$X_2 + X_3 \le 15$$
$$8X_1 - 2X_2 \le 2$$
$$X_1 + X_2 - X_3 \le 12$$
$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \le 22$$
$$4X_1 + 3X_2 \le 21$$
$$X_3 \le 3$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

وسينتج الحل بطريقة الازدواج حلاً مكافئاً . ولكن لكونه يحتوى على ثلاث قيود فقط ، فقد نصل إلى الحل الأمثل فى الجدول الرابع ، وبالتالى اقتصاداً فى وقت استخدام الحاسب الآلى.

$$\text{Minimize Cost} = 8U_1 + 15U_2 + 2U_3 + 12U_4 + 22U_5 + 21U_6 + 3U_7$$

$$1U_1 + 8U_3 + 1U_4 + 2U_5 + 4U_6 \geq 3$$

$$1U_1 + 1U_2 - 2U_3 + 1U_4 + 2U_5 + 3U_6 \geq 4$$

$$1U_2 - 1U_4 + 1U_5 + 1U_7 \geq 2$$

معجم المصطلحات

تحليل الحساسية : هى دراسة مدى حساسية الحل الامثل لفروض النموذج وتغير البيانات، وغالبا ما يشار إليها Postoptimality.

مدى الحل الامثل : وهو مدى القيم التى تتغير فى ظلها معاملات المتغير القاعدى بدون احداث تغير فى مخلوط الحل الامثل.

المعاملات الفنية: وهى معاملات المتغيرات فى معادلات القيود . وتمثل المعاملات كمية الموارد المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من المتغير.

سعر الظل: وهو معامل المتغير المتاح slack فى صف (C_j-Z_j) ويمثل قيمة الوحدة الاضافية من المورد .

مدى الجانب الايمن : وهى طريقة لإيجاد المدى الذى تظل خلاله أسعار الظل مقبولة.

العلاقة الأولية الازدواجية : هى طرق من البدائل لعرض البرامج الخطية .



الباب الثالث

تطبيـقات البرمجــة الخطـية
والمخلوط الأمثل للموارد

تناولنا فى الباب السابق فكرة المخلوط الأمثل للإنتاج لكونه من السهولة استيعاب مفهومه. فقد عرضنا المشكلة بيانيا ثم فى اطار البرمجة الخطية ، ثم توسعنا فيها مع إعادة الحل عدة مرات طبقاً للمتغيرات الجديدة، وتحديد المخلوط الأمثل للإنتاج فى ضوء الموارد المتاحة. وكانت القيود فى أقصى مداها (بمعنى عدم إمكانية استخدام أرض أو عمالة أكثر مما هو متاح).

ويعالج هذا الباب نوعاً آخر من المشكلات تُعرف بـ" تدنية التكلفة" أى تحقيق هدف محدد بأقل تكلفة. وهناك العديد من التطبيقات الصناعية للبرمجة الخطية كوسيلة للوصول إلى الحلول التى تحقق تدنية التكلُفة، منها الخاص بتقنين التغذية Feed rations، توليفات التغذية Food formulations ، قوائم التغذية Menus، جدولة حركة النقل Transportation schedules ، ومهام العاملين Personnel assignments. والأن نوجه انتباهنا إلى أحد مشاكل تدنية التكلفة.

مشكلة المخلوط الغذائى

The Feed problem

طـُلب منا تحضير مخلوط من المواد الغذائية الذى :

١- يحتوى على حد أدنى من الدهون قدره ٣ رطل.

٢- لا يحتوى على أكثر من ٥ رطل من الألياف.

٣- يحتوى على حد أدنى من البروتين قدره ٢ رطل.

وقد أفترض أن هناك مركبين أ، ب متاحان يمكن خلطهما لإنتاج التغذية المطلوبة. ويبين الجـدول (٣-١) خواص كل مركب بما فيه تكلفة الرطل لكل. كما يشير الرسم البيانى (٣-١) إلى التوليفات المختلفة من أ ، ب التى تتمشى مع القيود الخاصة بالدهن والألياف والبروتين.

جدول (٣-١) مواصفات المخلوط الغذائى

رطل من أ (X_1)	رطل من ب (X_2)
يحتوى على ٠,٤ رطل دهن	يحتوى على ٠,٢ رطل دهن
يحتوى على ٠,٤ رطل ألياف	يحتوى على ٠,٥ رطل ألياف
يحتوى على ٠,٤ رطل بروتين	يحتوى على ٠,٣ رطل بروتين
يتكلف ٣٠ دولار	يتكلف ٢٠ دولار

الحل البيانى

لقد توصلنا إلى هذا الرسم بنفس الاسلوب الذى سلكناه لرسم الشكل (١-١) فى الباب الأول.

ويصل الخط B B′ فى الشكل (٣-١) ما بين النقطتين B, B′ ويشير إلى كل التوليفات الممكنة من أ ، ب التى تفى بمطلوبات ٣ رطل دهن. ولما كان الدهن له قيد أدنى، فإن المساحة أعلا وإلى اليمين من الخط الحدودى B B′ هى المنطقة المقبول فيها الحلول التى تفى بهذا القيد (٣ رطل دهن أو أكثر)

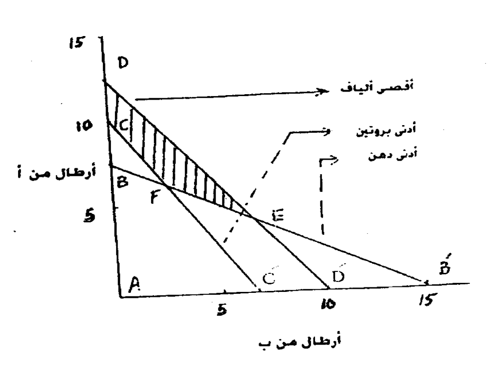
ويعنى الحد الأقصى للألياف بأنه لا يزيد عن ١٢,٥ رطل من أ أو ١٠ أرطال من ب. ويصل الخط DD′ ما بين النقطتين D,D′ و يشير إلى كل التوليفات الممكنة المسموح بها للألياف فى هذا المخلوط. ولما كانت الألياف لها قيد أقصى ، فان المساحة الى اليسار واسفل هذا الخط تمثل المنطقة المقبول بها الحلول التى تفى بالقيد من الألياف (٥ارطال من الألياف او اقل).

ويعنى الحد الأدنى من البروتين بأنه لا يزيد عن ١٠ أرطال من أ أو ٦ ٣/١٢ من ب . ويصل الخط CC′ بين تلك النقطتين C′,C ويشير إلى كل التوليفات الممكنة من أ ، ب التى تفى بمتطلبات ٢ رطل بروتين. ولما كان البروتين له قيد أدنى فإن المساحة أعلا وإلى اليمين من الخط الحدودى C C′ هى المنطقة المقبول فيها الحلول التى تفى بهذا القيد (٢ رطل بروتين أو أكثر)

وتبين المنطقة المظللة المسماة CDEF أنها منطقة الحلول الممكنة والتى تحدها القيود الثلاثة، وأن جميع النقاط بداخلها تفى بالقيود المنوه عنها. وكما أشرنا فى الباب الأول فإن نقط الأركان فقط Corner points لهذه المنطقة هى محط اهتمامنا.

شكل (٣-١)

التوليفات الممكنة بين المركبين أ ، ب التى تفى بالقيود الثلاثة



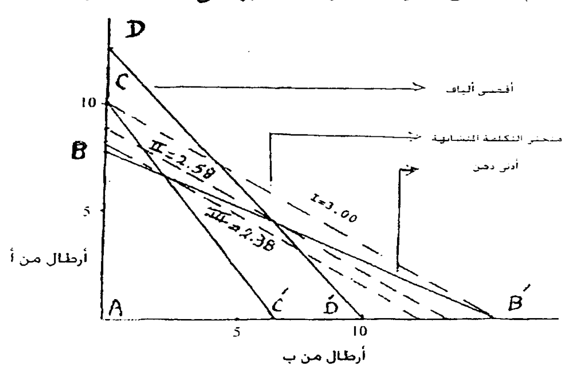
ويظهر الجدول (٣-٢) تكاليف الأربع أركان، و بالإضافة إلى ذلك ، فإن المحتويات من الدهن والألياف والبروتين تفى بالثلاثة قيود. ولما كانت الحلول الأربع تفى بتلك الاحتياجات فإن الحل F هو الجواب الأمثل فهو أقل التكاليف لمشكلتنا ، وأن أى نقطة أخرى ستكلفنا أكثر من ٢,٣٨ دولار.

جدول (٣-٢) حساب التكاليف عند الأركان الأربعة للشكل (٣-٢)

النقطة	أ (رطل)	ب (رطل)	دهن (رطل)	ألياف (رطل)	بروتين (رطل)	التكلفة (دولار)
C	١٠	صفر	٤,٠	٤,٠	٢,٠	٣,٠٠
D	١٢,٥	صفر	٥,٠	٥,٠	٢,٥	٣,٧٥
E	٤,١٧	٦,٦٧	٣,٠	٥,٠	٢,٨	٢,٥٨
F	٦,٢٥	٢,٥	٣,٠	٣,٧٥	٢,٠	٢,٣٨

وبنفس الاسلوب الذى أتبع فى الشكل (١-٢) من الباب الاول، فسنرى مجموعة من منحنيات التكلفة المتشابهة التى تعطى حلا بأقل تكلفة، وحيث كل خط يمثل توليفات من أ، ب بتكلفة معينة. ففى حالتنا هذه فيتكلف المركب أ ٣٠ دولار ، والمركب ب يتكلف ٢٠ دولار ونستطيع شراء ١,٥ رطل من المركب ب بنفس كمية النقود التى تشترى ١ رطل من المركب أ. ويبين الشكل (٣-٢) المنطقة الممكنة CDEF مع خطوط من منحنيات التكاليف المتشابهة ISOCOST . و أقل مستوى لهذه الخطوط ، الخط الثالث = ٢,٣٨ دولار ويمر خلال النقطة F ، وهذا يؤكد الحل الأمثل الذى توصلنا إليه فى الجدول (٣-٢).

شكل (٣-٢) عائلة من منحنيات التكاليف المتشابهة فى حل المشكلة بأقل تكلفة



الحل بأسلوب السمبلكس

تناولت جميع المشاكل فى الفصل الأول القيود التى لها حدود قصوى، والمشكلة الحالية لها قيد بحد أقصى، وقيدين بحد أدنى. ولكى نتناول قيود الحد الأدنى فسنحتاج إلى تعديل فى إجراء السمبلكس.

ويظهر حل مشكلتنا فى الجدول (٣-٣) . وسابقا ، كانت هناك أنشطة حقيقية ، وأنشطة متاحة ، أما فى

جدول (٣-٣) حل السمبلكس لمشكلة تدنية التكلفة للمقنن الغذائى

مخلوط الحل	C_j	انشطة حقيقية		أنشطة متاحة			أنشطة مصطنعة		مستوى النشاط RHS	
		أ	ب	دهن	ألياف	بروتين				
	C_j	-30	-20	0	0	0	-m	-m		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2		
← a_1	-m	(0.4)	0.2	-1	0	0	1	0	3	الجدول المبدئى
S_2	0	0.4	0.5	0	1	0	0	0	5	
a_2	-m	0.2	0.3	0	0	-1	0	1	2	
Z_j		-0.6m	-0.5 m	m	0	m	-m	-m	-5m	
$Z_j - C_j$		-0.6m +30	-.5m +20	m	0	m	0	0	-5m	
X_1	-30	1	0.5	-2.5	0	0	2.5	0	7.5	الخطوة الثانية
S_2	0	0	0.3	1	1	0	-1	0	2	
← a_2	-m	0	0.2	(0.5)	0	-1	-0.5	1	0.5	
Z_j		0	-0.2m -15	-.5m +15	0	m	0.5m -75	0	-	
$Z_j - C_j$		0	-0.2m +5	-.5m +75	0	m	1.5m -75	0	-0.5m -225	
X_1	-30	1	1.5	0	0	-5	0	5	10	الخطوة الثالثة
S_2	0	0	-0.1	0	1	2	0	-2	1	
→ S_1	0"	0	(0.4)	1	0	-2	-1	2	1	
Z_j		-30	-45	0	0	150	0	-150	-	
$Z_j - C_j$		0	-25	0	0	150	m	m-150	-300	
X_1	-30	1	0	-3.75	0	2.5	3.75	-2.5	6.25	الخطوة الرابعة
S_2	0	0	0	0.25	1	1.5	-0.25	-1.5	1.25	
→ X_2	-20	0	1	2.5	0	-5	-2.5	5	2.5	
Z_j		-30	-20	62.5	0	25	-62.5	-25	-	
$Z_j - C_j$		0	0	62.5	0	25	m-62.5	m-25	-237.5	

الجدول (٣-٣) فيضاف إلية أنشطة مصطنعة. هذا ومن الضرورى إدخال هذه الأنشطة المصطنعة artifical variables لان نقطة البداية تقع خارج منطقة الحل الممكنة.

ولكى نوضح الدور الذى تقوم به الأنشطة المصطنعة سنفحص كل خطة حذف وإضافة(يُسمى التقريب) بقدر الامكان. وقد أعيد عرض الجدول المبدئى كما يشير إليه الجدول (٣-٤) حيث ترى المعاملات بأبعادها المختلفة. ويصف ذلك الجدول النقطة A من الشكل (٣-٢) (بمعنى أننا نستخدم لا شىء من أ ولا شىء من ب). وعلى كل فتقع النقطة A خارج منطقة الحل الممكن. وتستخدم الانشطة الصناعية a_2 , a_1 كوسيلة مساعدة لاستيفاء الحدود الدنيا من القيود للدهن والبروتين حتى نستطيع تعديل الحل بإدخال كمية موجبة من أ ، ب. وللتأكد من إزاحة هذه الأنشطة الصناعية من الخطة ، أى لتصبح متغيرات غير قاعدية (nonbasic) سنعطيها تكلفة كبيرة جداً لكل وحدة منها. ويتلخص مفهوم ذلك فى استخدام (m-) كتكلفة بينما (m) تمثل قيمة أكثر تكلفة لأى من المتغيرات فى المشكلة. وأى رقم تكلفة يحتوى على جزء من m فيعتبر أكبر من أى رقم تكلفة لا يحتوى على m . وقد نستخدم بديلاً عن ذلك رقم فرضى مثل (9999-) ليقوم بنفس المهمة .

ويبين الصف الاول من الجدول (٣-٣) و (٣-٤) قيم C_j (صف التكلفة أو دالة الهدف) وهو يبين التكلفة أو العائد الذى يمكن الحصول عليه من كل وحدة واحدة من كل نشاط. وفى الباب الاول كان هدفنا هو تعظيم الارباح حيث الإيرادات كانت موجبة والتكاليف كانت سالبة ، وهنا فهدفنا الحالى هو تدنية التكاليف بأن تكون دالة الهدف سالبة الإشارة. وبناء على ذلك فلتدنية التكاليف سنعظم الدالة بالصورة المختصرة التالية:

$$\text{Maximize } \Pi: \quad -30\,X_1 - 20\,X_2$$

Subject to :

$$0.4\,X_1 + 0.2\,X_2 \geq 3 \qquad (1)$$

$$0.4\,X_1 + 0.5\,X_2 \leq 5 \qquad (2)$$

$$0.2\,X_1 + 0.3\,X_2 \geq 2 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (4)$$

ويبين الصف الأول من القيود أن الناتج النهائى يجب أن يحتوى على الأقل ٣ أرطال من الدهن. ويبين الجدول (٣-١) أن الرطل من الناتج أ (X_1) يحتوى على ٠,٤ رطل من الدهن وأن الرطل من الناتج ب (X_2) يحتوى على ٠,٢ رطل من الدهن. وبهذه المعلومات توصلنا إلى الحد الأول BB فى الشكل (٣-١).

جدول (٣-٤) إعادة محتويات الجدول المبدئى

مستوى النشاط	ربح / وحدة a_2 -m	ربح / وحدة a_1 -m	صفر ربح / رطل بروتين زائد	صفر ربح / رطل ألياف غير مستخدم	صفر ربح / رطل دهن زائد	٢٠٠ دولار ربح / رطل ب	٣٠٠ دولار ربح / رطل أ	C_j → ↓
	أنشطة مصطنعة		أنشطة متاحة			أنشطة حقيقية		
	-m	-m	بروتين	ألياف	دهن	ب	أ	
	a_2	a_1	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	
٣ رطل دهن	صفر × رطل دهن / وحدة a_2	١ × رطل دهن / وحدة a_1	صفر × رطل دهن / رطل بروتين زائد	صفر × رطل دهن / رطل ألياف غير مستخدم	١٠ × رطل دهن / رطل دهن زائد	٠,٢ × رطل دهن / رطل ب	٠,٤ × رطل دهن / رطل أ	-m ربح دولار / وحدة a_1
٥ رطل ألياف	صفر × رطل ألياف / وحدة a_2	صفر × رطل ألياف / وحدة a_1	صفر × رطل ألياف / رطل بروتين زائد	١ × رطل ألياف / رطل ألياف غير مستخدم	صفر × رطل ألياف / رطل دهن زائد	٠,٥ × رطل ألياف / رطل ب	٠,٤ × رطل ألياف / رطل أ	صفر ربح دولار / رطل ألياف غير مستخدمة
٢ رطل بروتين	١ × رطل بروتين / وحدة a_2	صفر × رطل بروتين / وحدة a_1	١٠ × رطل بروتين / رطل بروتين زائد	صفر × رطل بروتين / رطل ألياف غير مستخدم	صفر × رطل بروتين / رطل دهن زائد	٠,٣ × رطل بروتين / رطل ب	٠,٢ × رطل بروتين / رطل أ	-m ربح دولار / وحدة a_2
-5 m × ربح	-m × ربح / وحدة a_2	-m × ربح / وحدة a_1	m × ربح / رطل بروتين زائد	صفر × ربح / رطل ألياف غير مستخدم	m × ربح / رطل دهن زائد	-0.5 m × ربح / رطل ب	-0.6 m × ربح / رطل أ	Z_j
-5 m × ربح	صفر × ربح / وحدة a_2	صفر × ربح / وحدة a_1	m × ربح / رطل بروتين زائد	صفر × ربح / رطل ألياف غير مستخدم	m × ربح / رطل دهن زائد	(-0.5 m +20) × ربح / رطل ب	(-0.6m +30) × ربح / رطل أ	$Z_j - C_j$

وفـي حالـة الحـد الأدنـي مـن القيد ، فـإن إجـراءات السـمبلكس تحـذف المعادلـة الغيـر متسـاوية inequalities لـتحويلها إلـى مسـاويات equalities مـن خـلال إيجـاد نشـاط مـتاح (s) disposable (Slak) ونشـاط مصـطنع (a) artificial . ويسـاعدنا النشـاط المـتاح فـي التعرف علـى كـم مـزيد مـن الدهن يضـمه المخلوط أكثر مـن الحد الأدنـي. ويسمح لنا النشـاط المصـطنع ببساطة من استيفاء الحد الأدنى من الدهن وذلك بشـيء غير موجود فعلياً. (ويمكن النظر إلى النشاط المصطنع بطريقة أخرى أي كوسيلة محاسبية للاستدلال بها في التعرف على كم مزيد من الحد الأدنى يبقى غير مستوف) .وبهذا ، ففي هذه الحالة يتحول القيد الأول إلى الآتي:

$$0.4\ X_1 + 0.2\ X_2 - 1S_2 + 1a_1 = 3$$

أو

$$0.4\ X_1 + 0.2\ X_2 + 1a_1 = 3 + 1S_2$$

ويبين الصف الثاني من القيود أنه يجب ألا تزيد الألياف عن ٥ أرطال في المخلوط النهائي. وبهذه المعلومة فإن القيد يتحول إلى :

$$0.4\ X_1 + 0.5\ X_2 + 1S_1 = 5$$

وهذه المعلومة تساعدنا في التوصل إلى الحد الثاني DD' في الشكل (٣-١).

ويقودنا القيد الثالث إلى أنه يجب ألا يقل البروتين عن ٢ رطل في المخلوط النهائي، ونتوصل بذلك إلى الحد الثالث $C\ C'$ في الشكل (٣-١)، و يتحول القيد إلى:

$$0.2\ X_1 + 0.3\ X_2 - 1S_3 + 1a_2 = 2$$

أو

$$0.2\ X_1 + 0.3\ X_2 + 1a_2 = 2 + 1S_3$$

ويشير الصف Z_j إلى تكلفة كل نشاط في ضوء الانشطة التي تظهر في القاعدة Basis في الحل الجاري. ويُحسب صف Z_j في الجدول المبدئي بضرب كل عنصر في العمود بما يقابله من قيمة C_j في كل صف وجمع هذه النواتج.

فبالنسبة إلى عمود مستوى النشاط تجرى الحسابات كما يلى:

$$-m \times 3 = -3m$$

$$0.0 \times 5 = 0$$

$$-m \times 2 = -2\,m$$

$$-5m$$

وبالنسبة للأنشطة المتاحة (للدهن s_1 على سبيل المثال) فإن قيمة Z_j كالآتى:

$$-m \times -1 = m$$

$$0.0 \times 0.0 = 0.0$$

$$-m \times 0.0 = 0.0$$

$$m$$

وبالنسبة للأنشطة المصطنعة (a_1 على سبيل المثال) فإن قيمة Z_j كالآتى:

$$-m \times 1 = -m$$

$$0.0 \times 0.0 = 0$$

$$-m \times 0.0 = 0.0$$

$$-m$$

وبحساب $Z_j - C_j$ ، فهى بالنسبة لعمود مستوى النشاط قيمة C_j = صفر من التعريف وبالتالى فالقيمة

$$(-5m-0) = (Z_j - C_j)$$

$$-5m =$$

وبالنسبة للأنشطة الحقيقية (X_1 على سبيل المثال) فإن القيمة $Z_j - C_j$ هى :

$$-0.6\,m - (-30) = -0.6\,m + 30$$

، هكذا تجرى حساب باقى الأعمدة ، وبالإنتهاء من ذلك نكون قد أكملنا الجدول المبدئى لإستخدامه فى حل المشكلة بإجراءات السمبلكس. ويصف لنا هذا الجدول المبدئى من جدول (٣-٣) النقطة A (نقطة الأصل) فى شكل (٣-١) ، ويدلنا على وجودنا خارج منطقة الحل. ونستخدم صفرا من أرطال X_1 ، صفرا من ارطال X_2 ، وأننا نستوفى الحد الادنى من احتياجاتنا من الدهن بمقدار ٣ وحدات من a_1 (نشاط مصطنع) وكذلك الحد الأدنى من احتياجاتنا من البروتين بمقدار ٢ وحدة من a_2 ومتحصلين على تكلفه كبرى لا نهائية (5m-) لهذه الخطة.

وللبحث عن حل لتحسين الوضع، نفحص Z_j-C_j لأكثر القيم سلبية . تذكر أن m تمثل أكبر قيمة سالبة لـ m فنجد أن **النشاط الحقيقى X_1 له** Z_j-C_j **بقيمة قدرها** $-0.6\ m + 30$. حينئذ يمكن التحسين بإدخال هذا النشاط X_1 **فى خطة العمل. وهذا يقودنا للتحرك** على المحور الرأسى فى اتجاه النقطة β كما فى الشكل (٣-١). **ويجب هنا أن نحدد أقصى مسافة تمكننا من التحرك** قبل الوصول إلى الركن التالى، ويتقرر ذلك بقسمة قيم عمود **مستوى النشاط بالمعاملات** المرادفة فى محتويات العمود المختار (العمود المحورى) ومقارنة النتائج **لمعرفة أى الموارد أكثرها قيدا:**

فالنسبة للدهن:

٣ رطل دهن ÷ ٠,٤ $\frac{\text{رطل دهن}}{\text{رطل أ}}$ = **٧,٥ رطل أ**

وبالنسبة للألياف :

٥ رطل ألياف ÷ ٠,٤ $\frac{\text{رطل ألياف}}{\text{رطل أ}}$ = **١٢,٥ رطل أ**

وبالنسبة للبروتين:

٢ رطل بروتين ÷ ٠,٢ $\frac{\text{رطل بروتين}}{\text{رطل أ}}$ = **١٠ رطل أ**

ويتضح من ذلك أن أكثر **القيود تحديداً هو الدهن** . ويطرح علينا السمبلكس خطة عمل جديدة باستخدام أكبر قدر مستطاع من الناتج X_1 ، ويترك النشاط المصطنع a_1 الخطة (Basis) ليحل محله X_1. ويتأتى ذلك بقسمة كل عنصر من صف الدهن على معامل الدهن فى الناتج X_1 . وتقاطع الصف المزاح المحورى مع العمود المحورى القادم يعطينا الرقم المحورى.

ويتحدد الصف الجديد للناتج X_1 فى الخطوة الثانية (جدول ٣-٣) كالآتى :

القيمة	الوحدة			الوحدة		الناتج	الوحدة
٣	رطل دهن	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	٧,٥	رطل أ
٠,٤	رطل دهن / رطل أ	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	١	رطل أ / رطل أ
٠,٢	رطل دهن / رطل ب	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	٠,٥	رطل أ / رطل ب
١-	رطل دهن / رطل دهن زائد	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	٢,٥-	رطل أ / رطل دهن زائد
صفر	رطل دهن / رطل ألياف غير مستخدم	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	صفر	رطل أ / رطل ألياف غير مستخدم
صفر	رطل دهن / رطل بروتين زائد	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	صفر	رطل أ / رطل بروتين زائد
	رطل دهن / رطل a_1	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	٢,٥	رطل أ / رطل a_1
صفر	رطل دهن / رطل a_2	÷	٠,٤	رطل دهن / رطل أ	=	صفر	رطل أ / رطل a_2

وتكون قيمة الربح للخطوة الثانية (0.5 m - 225-) دولار ونفسر الربح السالب كتكلفة. وما زالت التكلفة كبيرة لا نهائية (حيث تحتوى على m) لأننا مازلنا خارج منطقة الحل الممكن. ويشير الحل الحالي إلى النقطة β في الشكل (٣-١). وتحسب باقى الأعمدة بنفس طريقة حساب (Z_j-C_j) لعمود مستوى النشاط.

ولأن النشاط X_1 هو الذى دخل الحل (Basis) فى الحذف الثانى، فإن على كل المعاملات الأخرى الداخلة فى عمود هذا النشاط ستساوى صفراً. ثم يجرى حساب (Z_j-C_j) لإنتفاء العمود المحورى والصف المحورى والرقم المحورى، وليكون العمود المحورى هو للنشاط S_1 (الدهن الزائد). وتؤدى الخطوة الثالثة إلى خطة تشير إلى :

١- استخدام ١٠ رطل من X_1 .

٢- يترك ١ رطل من الألياف المسموح بها غير مستخدم.

٣- يحتوى على ١ رطل من الدهن الزائد (رطل زيادة عن الحد الادنى المطلوب).

٤- تكلفة قدرها ٣٠٠ دولار .

وتمثل خطوة الحذف الثالث النقطة C فى الشكل (٣-١). ولما كانت التكلفة للخطة لا تحتوى على m فالخطة ممكن أن تستوفى كل القيود الفعلية . ومهما يكن فالهدف ليس فقط الحصول على حل ممكن بل أيضاً حل أمثل. فنبحث فى صف (Z_j-C_j) فى الحذف الثالث للتعرف على أكثر الأعمدة سلبيه التى يمكن أن تقلل التكاليف، وكان نتيجة ذلك اختيار النشاط X_2 ذو قيمة (Z_j-C_j) تساوى (-٢٥). وتكون الخطوة الرابعة هى الحل الامثل لمشكلتنا لعدم وجود أى قيم سالبة فى صف (Z_j-C_j) (أقل تكلفة) وهو يتمشى مع النقطة C فى الشكل (٣-١). ويتبين منه:

١- يستخدم ٦,٥٥ رطل من X_1.

٢- يترك ١.٢٥ رطل من الألياف المتاحة دون استخدام . . .

٣- يستخدم ٢,٥ رطل من X_2 .

٤- يتكلف ٢٣٧.٥ دولار .

وهذا الحل يتمشى مع القيود فى المشكلة الأصلية، وأن أسعار الظل فى الخطوة الرابعة تخبرنا بكم تكلفنا تلك القيود عند الحدِّية margin ، وأسعار الظل مّا هى إلا قيم (Z_j-C_j) للأنشطة المتاحة، فهى :

١- الدهن = ٦٢,٥

٢- الألياف = صفر

٣- البروتين = ٢٥

وتفسَّر تلك القراءات كالآتى:

١- إذا خفضنا الحد الادنى للدهن بمقدار رطل واحد (بمعنى من ٣ إلى ٢ رطل) فيمكننا توفير ٦٢,٥ دولار.

٢- إذا زاد الحد الأقصى للألياف بمقدار رطل واحد (بمعنى من ٥ إلى ٦ رطل) فلن نوفر شيئا، وهذا منطقى إذا فحصنا الشكل (٣-١). فالحل الذى يعطينا أدنى التكاليف هو عند النقطة F. فإذا زادات الكمية المسموح بها من الألياف عن الحد الاقصى فسيتحرك الخط DD' إلى أعلى واليمين ، وهذا سيجعل منطقة الحل الممكن أكبر ولكن لن تؤثر فى الحل المثالى الحالى.

٣- إذا خفضنا الحد الأدنى للبروتين بمقدار رطل واحد (بمعنى من ٢ إلى ١ رطل) فيمكننا توفير ٢٥ دولار. وبالاختيار للحل الازدواجى Dual solution للتعرف على أى القيود أكثر تكلفة، فالمشرف الغذائى غالباً ما يمكنه بخبرته إحداث توازن ومفاضلة من شأنها أن تكون النتائج ذات تكلفة أكثر قلة وفى أسرع وقت ممكن باستخدام الحاسب الآلى والبرمجة الخطية.

*

اضافة قيد على وزن المخلوط

لقد لاحظ القارئ أن الوزن النهائي للمخلوط فى جدول (٣-٣) كان ٨,٧٥ رطلاً (٦,٢٥ رطل من أ مضافاً إليهما ٢,٥ رطل من ب) ... عادة، ما يكون مرغوباً فيه أن يعطينا البرنامج الخطى حلا ذي وحدات منطقية ، وليكن مثلا ١٠ أرطال.

فإذا أردنا مخلوطا نهائياً وزنه ١٠ أرطال فسنحتاج إضافة قيد آخر لمشكلتنا ، وبالتالى سيهدف الحل إلى تقليل تكلفة هذا المخلوط فى ظل المواصفات التالية:

١-يحتوى على الأقل ٣ رطل من الدهن.

٢-يحتوى على الأكثر ٥ رطل من الألياف.

٣-يحتوى على الأقل ٢ رطل من البروتين.

٤-يزيد بالضبط ١٠ رطل.

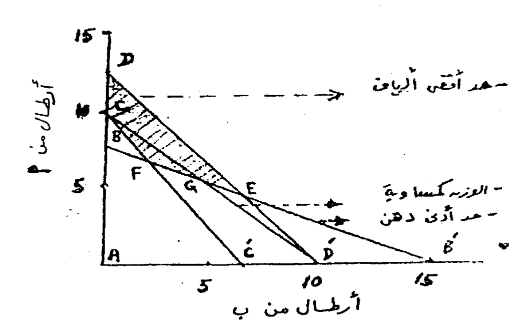
وباستخدام المحتويين أ، ب الواردين فى الجدول (٣-١) نستطيع رسم الشكل التالى (٣-٣) وعليه اختياراتنا لهذه المشكلة. فالحدود CC' (الحد الأدنى للبروتين)، BB' (الحد الأدنى للدهن) و DD' (الحد الأقصى للألياف) كانت قيودنا الثلاثة الأصلية،وكانت المنطقة المظللة CDEF هى منطقة الحل الممكنة والتى أظهرها الشكل (٣-١) ، أما القيد الخاص بأن يكون وزن المخلوط النهائى ١٠ رطل فهو مبين بالخط CD' فى الشكل (٣-٣) ، وتكون فقط النقط الموجودة على الخط CD' هى التى تعطى التوليفات من المحتويين أ، ب اللذين يزنان ١٠ أرطال بالضبط. ونتيجة لذلك فقد أختزلت منطقة الحل الممكن من المساحة المظللة CDEF إلى الجزء الخطى CG والتى تقع عليه النقط التى تستوفى القيود الأربعة. وحيث أنه يهمنا فقط الأركان فى الحل، فأقل تكلفة ستكون عند النقطة C أو G .

وهذا التعديل فى المشكلة الأصلية يلفت نظرنا إلى نقطتين هامتين بخصوص مشاكل البرامج الخطية:

١- بافتراض المشكلة الأصلية وحلها فإن إضافة قيد جديد سينتج عنه زيادة التكلفة (أو تقليل الربح) لأن إضافة القيد يقلل من اختياراتنا ، والإمكانية الأخرى الوحيدة هى أن القيد الجديد غير ذى وزن (بمعنى فى حالتنا ، أن الوزن النهائى للمخلوط لا يجب أن يزيد عن ١٥ رطلا).

٢- ولو أن القيد المضاف سيقلل من خياراتنا الممكنة للحل، وكان القيد من نوع المساويات equality فإنه سيقلل أكثر من اختياراتنا. ونظرة سريعة إلى الشكل (٣-٣) يؤكد هذه الحالة ، أى يقلل من مساحة منطقة الحل الممكنة ، ونتيجة لذلك فيفضل الأخصائيون استخدام غير المتساويات inequalities عن المساويات طالما تستوفى الغرض. إلا أنه فى بعض الأحوال كمشاكل تخليط الغذاء فغالباً يكون من الضرورى ذكر الوزن صريحاً للمخلوط النهائى فى حالة المتساويات القيودية.

الشكل (٣-٣) إضافة قيد من نوع المساواية equality يقلل بدرجة كبيرة مساحة منطقة الحل الممكنة.



ويبين الجدول (٣-٥) حل البرنامج الخطى الذى أوضحناه بيانياً فى الشكل (٣-٣). وقد نتج عن قيد الوزن صف اضافى. وكما فى حالة القيود ذات الحد الأدنى فإننا نضيف نشاطاً مصطنعاً لمقابلة متطلبات المساواة أولياً (كأن يكون أ = صفر ، ب = صفر وأننا خارج منطقة الحل الممكن. وعلى غير ما اعتدنا عليه من غير مساوياتنا inequalities السابقة من تقديم أنشطة متاحة disposable activities عند التحويل إلى مساويات equalities، فإنه فى حالتنا من قيد الوزن الذى هو من نوع المساوية لا نستخدم نشاطاً متاحاً slack activity.

ونقرأ صف قيد الوزن فى الجدول المبدئى من جدول (٣-٥) كالآتى :

$$1X_1 + 1\,X_2 + 1a_1 = 10$$

حيث a_1 هو نشاط مصطنع ذو قيمة تكلفة عالية جداً (m-) والذى ستكون قيمته صفراً فى الحل الامثل.

وتبين الخطوة الخامسة من جدول (٣-٥) الحل الأمثل لمشكلتنا الجديدة ، والحل الرقمى لذلك يبين:

١- استخدام ٥ أرطال من أ.

٢- ترك ٠,٥ رطل من الألياف المتاحة بدون استخدام .

٣- استخدام ٥ أرطال من ب .

٤- يزيد عن الحد الأدنى للبروتين بمقدار ٠,٥ رطل.

٥- يتكلف ٢٥٠ دولار.

جدول (٣-٥) حل السمبلكس لمشكلة أقل تكلفة للمقنن الغذائى ، وحيث يمثل وزن المخلوط النهائى قيداً

		أنشطة حقيقية		أنشطة متاحة			أنشطة مصطنعة			مستوى النشاط RHS	
		أ	ب	دهن	ألياف	بروتين					
	C_j	-30	-20	0	0	0	-m	-m	-m		
Solution Mix		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3		
a_1 (حد أدنى دهن)	-m	(0.4)	0.2	-1	0	0	1	0	0	3	الجدول المبدئى
S_2 (حد أقصى ألياف)	0	0.4	0.5	0	1	0	0	0	0	5	
a_2 (حد أدنى بروتين)	-m	0.2	0.3	0	1	-1	0	1	0	2	
a_3 (الوزن)	-m	1	1	0	0	0	0	0	1	10	
Z_j		-1.6m	-1.5m	m	0	m	-m	-m	-m		
$Z_j - C_j$		-1.6m +30	-1.5 +20	m	0	m	0	0	0	-15m	
→ X_1	-30	1	0.5	-2.5	0	0	2.5	0	0	7.5	الخطوة الثانية
S_2	0	0	0.3	1	1	0	-1	0	0	2	
a_2	-m	0	0.2	(0.5)	0	-1	0.5	1	0	0.5	
a_3	-m	0	0.5	2.5	0	0	-2.5	0	1	2.5	
$Z_j - C_j$		0	-0.7m+5	-3m+75	0	m	4m-75	0	0	-3m-225	
X_1	-30	1	1.5	0	0	-5	0	5	0	10	الخطوة الثالثة
S_2	0	0	-0.1	0	1	2	0	-2	0	1	
→ S_1	0	0	0.4	1	0	-2	-1	2	0	1	
a_1	-m	0	-0.5	0	0	(5)	0	-5	1	0	
$Z_j - C_j$		0	0.5m-25	0	0	-5m+150	m	6m-150	0	-300	
X_1	-30	1	1	0	0	0	0	0	1	10	الخطوة الرابعة
S_2	0	0	0.1	0	1	0	0	0	-0.4	1	
S_1	0	0	(0.2)	1	0	0	-1	0	0.4	1	
→ S_1	0	0	-0.1	0	0	1	0	-1	0.2	0	
$Z_j - C_j$		0	-10	0	0	0	m	m	m-30	-300	
X_1	-30	1	0	-5	0	0	5	0	-1	5	الخطوة الخامسة
S_2	0	0	0	-0.5	1	0	0.5	0	-0.6	0.5	
→ X_2	-20	0	1	5	0	0	-5	0	2	5	
S_3	0	0	0	0.5	0	1	-0.5	-1	0.4	0.5	
$Z_j - C_j$		0	0	50	0	0	m	m-50	m-10	-250	

ويشير Dual solution إلى أننا لو استطعنا تقليل الحد الأدنى من الدهون بمقدار رطل واحد، فإننا يمكننا تخفيض تكلفة الغذاء بمقدار قدره ٥٠ دولار.

ولا يوجد هنا ما يمكن تخفيضه من زيادة الحد الأعلى للألياف أو تقليل الحد الأدنى للبروتين. وفى ختام هذا المثال نستطيع أن نقول أننا أمكننا عرض الفكرة الأساسية من البرنامج الخطى. كما أن هناك بعض الأساليب الخاصة والمختصرة التى سنشير إليها عند مناقشتنا للمشاكل المتباينة.

التوليفة الغذائيـــة

Food Formulation

تعتبر التوليفة الغذائية من المشاكل الأولى ذات البعد الواقعى الذى سنناقشه فى تكوين خلطة الخضار باللحم المعلبة وذات القيد الأقصى على المحتوى الكوليسترولى. وفى هذا المثال سيجرى تحضير تلك الخلطة ذات الكوليسترول المنخفض، وذات اللحم البقرى المنخفض فى المحتوى الدهنى، مستعينين فى ذلك بالأغذية الصحية المعدلة والموصى بها،وسنستخدم أيضاً البرنامج الخطى فى تحقيق هدف تدنية التكلفة.

وتظهر بيانات الجدول المبدئى لمشكلتنا فى الجدول (٣-٦). وقد نُحصل على القيمة الغذائية لكل من المكونات فى الخلطة المشاع غذائها من الدليل الارشادى رقم ٨ الذى أصدرته وزارة الزراعة الأمريكية عام ١٩٦٣. كما أن البيانات الخاصة بقيم الكوليسترول كان مصدرها فيلى وآخرون (١٩٧٢). ويمثل الجانب **الأيمن** من الجدول(٣-٦) قيود التغذية لكل ١٠٠ جم من المخلوط الغذائى. وبما أن أعمدة الجدول تمثل المكونات لكل جرام واحد، فإن التكلفة هى بالدولار لكل جرام.

وفيما يلى الإجراءات التى استخدمت للحل بهدف تدنية التكلفة:

(١) من بيانات عمود مستوى النشاط (الأيمن) فهو يمثل الاحتياجات لكل ١٠٠ جم من الخلطة الغذائية المذكورة والمتفق عليها غذائياً للفرد، وفى الوقت نفسه ذات المستوى المنخفض من الكوليسترول،والدهن والسعرات الحرارية. ويتضمن العمود الأول من الجدول القيود الرئيسية وهى الحد الأعلى من الكوليسترول ، والحد الأدنى من السعرات الحرارية، والحد الأدنى"من البروتين والوزن. وكان الحل فى ضوء هذه القيود غير منظور infeasible ، وليس مجهولاً ذلك الوضع عند تنمية مخلوط ذى تكلفة دنيا . ومهما يكن ، فإن معظم برامج الحاسب الآلى ستشير لنا إلى ماهية الأسباب للحل غير المنظور . وفى حالتنا تلك، فإن القيود التى لم تستوف هى الطاقة(كانت منخفضة جداً بمقدار ١٠١,١ سعراً حرارياً)، الثيامين (منخفض بمقدار ٠,١٤ مللجرام). والريبوفلافين (منخفض بمقدار ٠,٠٨ مللجم)، والنياسين (منخفض بمقدار ٠,٧٥ مللجم). وعند هذه النقطة نستطيع تعديل المشكلة بإضافة أنشطة (مثل الفيتامينات) وحل المشكلة والاختيار الآخر هو تعديل القيود الموضوعة ، وفى مثالنا، سنتبع هذا الطريق الآخر.

جدول(٣-٦) الجدول المبدئى لمعلب الخضار باللحم لتحضيره بمستوى كوليسترول منخفض

	لحم بقرى	زيت	سمن نباتى	دقيق	ماء	بقدونس	توابل	بطاطس	جزر	كرفس	بصل	نبيذ	عش الغراب	طماطم	مرق دجاج	دقيق ذرة	أرز	زبدة	مستوى النشاط	
التكلفة	-0.3	-0.2	-0.1	-0.04	0	-0.1	-1	-0.04	-0.05	-0.8	-0.04	-0.3	-0.2	-0.06	-0.04	-0.05	-0.2	-0.2		
حد أعلى كوليسترول	0.9	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4	100	ملجم
حد أدنى بروتين	0.3	0	0	0.1	0	0	0	0.02	0.007	0.01	0.01	0	0.02	0.01	0.02	0.003	.02	0.01	12	جم
حد أدنى كربوهيدرات	0	0	0	0.8	0	0	0	0.2	0.1	0.004	0.07	0.04	0.02	0.04	0.01	0.9	0.3	0.01	10	جم
حد أعلى كربوهيدرات	0	0	0	0.8	0	0	0	0.2	0.1	0.004	0.07	0.04	0.02	0.04	0.01	0.9	0.3	0.01	25	جم
حد أدنى سعرات حرارية	2	9	7	4	0	0	0	1	0.3	0.1	0.3	0.8	0.2	0.2	0.1	4	1	0.7	400	كالورى
حد أعلى سعرات حرارية	2	9	7	4	0	0	0	1	0.3	0.1	0.3	0.8	0.2	0.2	0.1	4	1	0.7	600	كالورى
حد أدنى فيتامين A	0.1	0	33	0	0	40	0	0	105	2.4	0.4	0	0	9	0	0	0	33	500	وحدة دولية
حد أدنى ثيامين	0.0005	0	0	0.004	0	0	0	0.001	0.0005	0	0.0003	0	0.0002	0.0005	0	0	0.001	0	0.3	ملجم
حد أدنى ريبوفلافين	0.002	0	0	0.003	0	0	0	0.0004	0.0004	0	0.0003	0	0.002	0.0003	0	0	0.0001	0	0.3	ملجم
حد أدنى فيتامين C	0	0	0	0	0	2	0	0.2	0.06	0.09	.07	0	0.02	0.2	0	0	0	0	2	ملجم
حد أدنى نياسين	0.05	0	0	0.04	0	0	0	0.02	0.004	0	.002	0	0.02	0.007	0.005	0	.01	0	2	ملجم
حد أدنى حديد	0.04	0	0	0.03	0	0.01	0	0.007	0.006	0.003	.004	0.004	0.005	0.005	0.002	0	.009	0	2	ملجم
حد أدنى دهن	0.06	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8	8	جم
حد أعلى دهن	0.06	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8	10	جم
الوزن	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	100	جم

(٢) وكنتيجة للحل الأول من البرنامج الخطى، فقد رفعنا الحد الأعلى للكربوهيدرات إلى ٣٠ جم ، وخفضنا الحد الأدنى للسعرات الحرارية إلى ٣٠٠ والحد الأعلى إلى ٥٠٠، وخفضنا الثيامين إلى ٠,١٢ مللجم، والريبوفلافين إلى ٠,٢٠ مللجم ، والنياسين إلى ١,١ مللجم . ولقد زدنا الحد الاعلى للدهن إلى ١٤ جم (عمود ٢ جدول ٣-٧) . وقد نجح البرنامج فى استيفاء الاحتياجات الغذائية ، ولكن أتضح أن طعم المخلوط الغذائى غير مستساغ ، فلقد أحتوى على ٢٧ جرام تقريباً من اللحم البقرى ، ٥ جرام زيت، ٨ جرام سمن نباتى ، ٣٦ جرام دقيق ، ١٠ جرام ماء ، ٢جرام جزر و ١٢ جرام بصل.

(٣) أضفنا حدوداً عليا ودنيا على كميات المكونات للحصول على طعم أكثر استساغا.فلقد أضفنا حداً أدنى لكل من اللحم البقرى ٣٥ جرام و ١٢ جرام للبطاطس ، وحداً أعلى لكل من السمن النباتى صفر جرام، و ٤ جرام للدقيق، ولم نغير القيود الغذائية (انظر عمود ٣ من الجدول ٣-٧). وبالتعديل فى المشكلة فلقد حصلنا ثانية على حل غير منظور . فلقد نتج عن ذلك عدم الحصول على مستويات الحدود الدنيا فى المخلوط من الثيامين، والريبوفلافين والنياسين. وقد يكون ذلك مقبولاً كحل نهائى حيث أن تكلفة إضافة الفيتامينات لا تذكر ، ولكننا اخترنا تغيير مستويات القيود ثانية.

(٤) وكنتيجة لذلك، فلقد خُفّضت كمية الثيامين و الريبوفلافين والنياسين اللازمة للمخلوط. (انظر عمود ٤ من الجدول ٣-٧). ولقد حصلنا على حل غير منظور والذى أظهر أن مستوى الطاقة كان تحت مستوى الحد الأدنى بمقدار ٦١ سعر حرارى .

(٥)خُفّضت السعرات الحرارية إلى ٢٠٠ لكل ١٠٠ جرام من المخلوط ولم نغير حدود المحتويات الغذائية (انظر عمود ٥ من الجدول ٣-٧).ولقد كان هناك حل أمثل ، ولكن المخلوط كان له طعم غير مستساغ، محتوياً على ٣٨ جرام من اللحم البقرى، ٧ جرام من الزيت، ٤ جرام من الدقيق، ٤٥ جرام من البطاطس و ٥ جرام من الجزر.

(٦)خفض الحد الأدنى للسعرات الحرارية إلى ١٥٠ والحد الأعلى إلى ٣٠٠ . ولقد أضيفت حدود للمحتوى الغذائى لتحسين طعم المخلوط. وكانت هناك حدود دنيا على كميات الزيت، المياه،الجزر ، الكرفس ، البصل، النبيذ ، عيش الغراب والطماطم (أنظر عمود ٦ من الجدول ٣-٧) . ولقد توصلنا إلى حل غير منظور حيث كانت كمية البروتين والكربوهيدرات والحديد منخفضة جداً.

(٧)خفض البروتين إلى ١١ جرام ، والكربوهيدرات إلى ٧ جرام والحديد إلى ١,٧ مللجرام لكل ١٠٠ جرام من المخلوط. ولم تتغير الحدود على المحتويات الغذائية. (انظر عمود ٧ من الجدول ٣-٧). ولقد كان هناك حل أمثل ،وكان المخلوط مستساغ الطعم باستثناء المحتوى الزيتى حيث كان الحكم عليه بأن نسبته مرتفعة قليلاً.

(٨)وفى محاولة لتقليل المحتوى الزيتى، فلقد خفض الحد الأدنى للدهن إلى ٤ جرام لكل ١٠٠ جرام من المخلوط، ولم تتغير الحدود على المحتويات الغذائية. (انظر عمود ٨ من الجدول ٣-٧). ولقد توصلنا إلى حل غير منظور حيث كانت الكربوهيدرات والحديد دون الحد الأدنى بقليل.

(٩) أدخلت تعديلات على حدود المحتويات الغذائية ، فكان هناك حد أعلى على الزيت مقداره ٢ جرام، وحد أدنى على كل من الطماطم ٦ جرام ، ماء ١٢ جرام والبطاطس ١٤ جرام. ولقد أضيف حد أدنى للبقدونس قدره ٠,٥ جرام والتوابل ٠,٥ جرام .(انظر عمود ٩ من الجدول ٣-٧). ولقد كان هناك حل غير منظور لأن المخلوط الغذائى لم يوفر لنا الاحتياجات من السعرات الحرارية.

(١٠) خفضت السعرات الحرارية إلى ١٣٠ لكل ١٠٠ جرام من المخلوط. (انظر عمود ١٠ من جدول ٣-٧) كانت النتيجة طعما مستساغا، ولو أن محتوى الدقيق كان زائداً .

(١١) خفض الحد الاعلى للدقيق إلى ٣ جرام لكل ١٠٠ جرام مخلوط (انظر عمود ١١ من جدول ٣-٧) كانت النتيجة حصولنا على المخلوط الغذائى ذى الطعم المستساغ، والمستوفى متطلبات التغذية.

ويبين الجدول (٣-٨) التكلفة، مكونات التغذية والمحتوى الغذائى للمخلوط المنخفض مستوى الكوليسترول ، نتيجة امتزاج عنصر الآلة مع الإنسان. وكانت الإحدى عشر عملية الحاسوب الآتى ضرورية للوصول إلى أول حل متفق عليه للبرنامج الخطى محققين أقل تكلفة لذلك المخلوط الغذائى. فلقد بدأنا بمشكلة وخُفضت فى ١٦ صف و ١٩ عمود كما يتبين من الجدول (٣-٦).

جدول (٣-٧) الجانب الايمن من الجدول المبدئى (عمود مستوى النشاط) فى برامج خطية متتالية لمشاكل معلب الخضار باللحم ذى مستوى الكوليسترول المنخفض

	برامج خطية بديلة متتالية										
قيود المكونات	1	2	3	4	5	6	7	6	9	10	11
القيود الاصلية											
حد أعلى كوليسترول، مللجم	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
حد أدنى بروتين، جم	12	12	12	12	12	12	11	11	11	11	11
حد ادنى كربوهيدرات جم	10	10	10	10	10	10	7	7	7	7	7
حد اعلى كربوهيدرات جم	25	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
حد ادنى سعرات حرارية	400	300	300	300	200	150	150	150	150	130	130
حد اعلى سعرات حرارية	600	500	500	500	500	300	300	300	300	300	300
حد ادنى فيتامين أ وحدة	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
حد ادنى ثيامين مللجم	0.3	0.12	0.12	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
حد ادنى ريبوفلافين مللجم	0.3	0.20	0.20	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
حد ادنى فيتامين c مللجم	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
حد أدنى نياسين مللجم	2	1. 1	1. 1	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
حد ادنى حديد ملجم	2	2	2	2	2	2	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7
حد ادنى دهن جم	8	8	8	8	8	8	8	4	4	4	4
حد أعلى دهن جم	10	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
الوزن (مساوية بالضرورة) جم	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
قيود اضافية اثناء الحلول المتتالية											
حد ادنى لحم بقرى جم			35	35	35	35	35	35	35	35	35
حد ادنى بطاطس جم			12	12	12	12	12	12	14	14	14
حد اعلى سمن نباتى جم			0	0	0	0	0	0	0	0	0
حد اعلى دقيق جم			4	4	4	4	4	4	4	4	3
حد ادنى زيت جم						1.9	1.9	1.9			
حد ادنى ماء جم						10	10	10	12	12	12
حد ادنى جزر جم						8	8	8	8	8	8
حد أدنى كرفس جم						2	2	2	2	2	2
حد ادنى بصل جم						5	5	5	5	5	5
حد ادنى نبيذ جم						7	7	7	7	7	7
حد ادنى عش الغراب جم						2	2	2	2	2	2
حد أدنى طماطم جم						3	3	3	6	6	6
حد أعلى دقيق ذرة جم						0	0	0	0	0	0
حد أعلى زيت جم									2	2	2
حد أدنى بقدونس جم									0.5	0.5	0.5
حد أدنى توابل جم									0.5	0.5	0.5

وكلما عدّلنا المشكلة فقد أضفنا قيوداً جديدة كما تبين بالتغير فى جانب مستوى النشاط (الجانب الأيمن من الجدول المبدئى). وقد كان الحل النهائى (عمود ١١ من الجدول ٣-٧) مكونا من ٣٢ صف و ١٦ عمود.

ويشير الجدول (٣-٩) إلى الجدول المبدئى للبرنامج الأخير (رقم ١١). وبوصولنا إلى الحل الأمثل يمكن تحويله إلى مكونات الحجم العادى الذى يفى باحتياجات ٦ أشخاص أو بما يوازى ٨ أكواب من المخلوط (الكوب سعة ٨ أوقية). وهذا معناه ٣ أوقيات من اللحم المطهى لكل ١,٥ رطل (٦٨٠جم) من المخلوط غير المطهى.

جدول (٣-٨) مكونات التغذية ونسبة مكونات المخلوط الغذائى منخفض الكوليسترول

	التكلفة	16.31 وحدة نقدية
مللجم	كوليسترول	33.03
جم	بروتين	11.84
جم	كربوهيدرات	7.18
جم	دهن	4.20
وحدة دولية	فيتامين أ	924.47
ملجم	ثيامين	0.07
ملجم	ريبوفلافين	0.11
ملجم	فيتامين c	8.15
ملجم	نياسين	0.55
ملجم	حديد	1.81
	سعرات حرارية	130.00
جم	وزن	100.00
جم	لحم بقرى	36.70
جم	زيت	2.00
جم	سمن نباتى	-
جم	دقيق	3.00
جم	ماء	12.00
جم	بقدونس	0.50
جم	توابل	0.50
جم	بطاطس	15.30
جم	جزر	8.00
جم	كرفس	2.00
جم	بصل	5.00
جم	نبيذ	7.00
جم	عش الغراب	2.00
جم	طماطم	6.00
جم	دقيق ذرة	-
جم	أرز	-

وقد أظهر الحل أنه من الضروري تواجد ٣٦ % أو ٣٦ جرام لحم بقري لكل ١٠٠ جم من المخلوط النهائي.

فإذا كان ٦٨٠ جم من المخلوط غير **المطهى** به ٠,٣٦ جم لحم بقرى

فإن(س) من المخلوط غير **المطهى** به ١ جم لحم بقرى

س = ٦٨٠÷ ٠,٣٦ = ١٨٨٨,٩ = ١٩٠٠ جم تقريباً

أى أننا نحتاج إلى ما يعادل ١٩ مرة من كل **مكون غذائي مع تعديل طفيف للحصول** على مقاييس واقعية للوجبات المنزلية.

ويبين الجدول (٣-١٠) المكونات **المعدلة للمخلوط الغذائي . وينطوى** نصيب الفرد على كوب واحد **أو** ٢٤٥ جرام تقريباً ، أى ٢,٥ مرة من **إحتياجات التغذية كما رصدت** على أساس ١٠٠ جرام مخلوط **وهو نصيب ما يستهلكه الفرد فعلياً. أى أن الفرد سيستلم تقريباً** ٨٢ **مللجم من الكوليسترول ، ٢٩** جرام من البروتين ، ١٠ جرام من الدهن ، ٤,٥ **مللجم من الحديد و** ٣٢٥ سعر حراري لكل نصيب من **المخلوط.**

وبإتمام الحسابات المبدئية بخصوص **التكلفة ومحتوى التغذية ، يمكن** اشتقاق أغذية أخرى بإستخدام هذه المعلومات ،كما قد تضاف قيم أغذية **جديدة كلما** تطلب **الأمر،** فبالتحكم فى محتويات المخلوط من خلال قيود الحد الأعلى والحد الأدنى، فإن **مخلوط** مستساغ **طعمه يمكن** تكوينه مع الاحتفاظ باحتياجات التغذية.

جدول (٣-٩) الجدول المبدئي لمعلب الخضار باللحم لمستوى كوليسترول منخفض لأجل الاستساغة (برنامج ١١)

	لحم بقري	زيت	سمن نباتي	دقيق	ماء	بقدونس	توابل	بطاطس	جزر	كرفس	بصل	نبيذ	عش الغراب	طماطم	مرقة دجاج	دقيق ذرة	أرز	زبدة	مستوى النشاط
التكلفة	-0.3	-0.2	-0.1	-.04	0	-0.1	-0.1	-.04	-.04	-.08	-.04	-0.3	-0.2	-.06	-0.04	-0.05	- 0.2	-0.2	
أقصى كوليسترول	0.9	0	0.5	0	0	0	0	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4	100
أدنى بروتين	0.3	0	0	0.1	0	0	0	.02	0.007	0.01	0.01	0	.02	0.01	.02	.003	0.02	0.01	11
أدنى كربوهيدرات	0	0	0	0.8	0	0	0	0.2	0.1	0.004	0.07	.04	.02	.04	.01	0.9	0.3	0.01	7
أقصى كربوهيدرات	0	0	0	0.8	0	0	0	0.2	0.1	0.004	0.07	.04	.02	.04	.01	0.9	0.3	0.7	30
أدنى سعرات حرارية	2	9	7	4	0	0	0	1	0.3	0.1	0.3	0.8	0.2	0.2	0.1	4	1	0.7	130
أقصى سعرات حرارية	2	9	7	4	0	0	0	1	0.3	0.1	0.3	0.8	0.2	0.2	0.1	4	1	33	300
أدنى فيتامين أ	0.1	0	33	0	0	40	0	0	105	2.4	0.4	0	0	9	0	0	0	0	500
أدنى ثيامين	0.0005	0	0	0.004	0	0	0	0.001	0.0005	0	0.0003	0	0.0002	.0005	0	0	0.001	0	0.03
أدنى ريبوفلافين	0.002	0	0	0.003	0	0	0	0.0004	0.0004	0	0.0003	0	.002	.0003	0	0	0.0001	0	0.08
أدنى فيتامين c	0	0	0	0	0	2	0	0.2	0.06	.09	.07	0	.02	0.2	0	0	0	0	2
أدنى نياسين	0.05	0	0	0.04	0	0	0	0.02	0.004	0	0.002	0	.02	.007	.005	0	0.01	0	.30
أدنى حديد	0.04	0	0	0.03	0	0.01	0	0.007	0.006	0.003	0.004	.004	.005	.005	.002	0	0.009	0	1.7
أدنى دهن	0.06	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8	4
أقصى دهن	0.06	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8	14
الوزن	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
أدنى لحم بقري	1																		35
أدنى بطاطس								1											14
أدنى سمن نباتي			1																0
أقصى دقيق				1															3
أدنى زيت		1																	0
أدنى ماء					1														12
أدنى جزر									1										8
أدنى كرفس										1									2
أدنى بصل											1								5
أدنى نبيذ												1							7
أدنى عش الغراب													1						2
أدنى طماطم														1					6
أقصى دقيق ذرة																1			0
أقصى زيت		1																	2
أدنى بقدونس						1													0.5
أدنى توابل							1												0.5

جدول (٣-١٠) المكونات المعدلة للمخلوط الغذائى

المكونات	العيار	جرام
لحم بقرى ، بدون عظم من الفخذة، مكعبات ١ بوصة	١,٥ رطل	٦٨٠
بطاطس ، مكعبات ١ بوصة	٢ كوب *	٣٠٠
جزر ، إربع	١ كوب	١٤٤
عش الغراب ، معلب	٣\١ كوب	٤٧
بصل ، شرائح	٤\٣ كوب	٨٧
طماطم ، معلبة	٢\١ كوب	١١٩
نبيذ	٢\١ كوب	١٢٣
كرفس ،مكعبات	٣\١ كوب	٤٠
ماء	١ كوب	٢٤٠
زيت ، سافلور	٣ ملعقة شوربة	٤٥
دقيق	٣\١ كوب	٤٨
ملح	١,٥ ملعقة شوربة	٠,٧
فلفل أسود	٤\١ ملعقة شوربة	٠,٢
بقدونس ، طازج	١,٥ ملعقة شوربة	٩
ثوم	١ فص	٨
الإجمالى		١٨٩٠,٩

* ملاحظة: الكوب عبارة عن ٨ أوقيات.

الخلاصة

تناول هذا الباب صورتين من تدنية تكلفة مشاكل التوليفة الغذائية. وهذا النوع من المشاكل من أكثرها استخداماً للبرامج الخطية فى تطبيقات الصناعة فى تحقيق أهدافها المحددة. وقد أرسيت قواعد الفهم الأساسية واستخدامات البرامج الخطية فى هذا الباب والأول سابقاً.

هذا وتستخدم تلك الحلول فى حل مشاكل مثل العلائق الغذائية ، وتوليفات الأغذية الخفيفة Snack blends ومخاليط التسالى من النقليات ، والمايونيز ، ..... الخ،وما يُستتبع ذلك من إعداد تقارير إلى لجنة الميزانية أو مدير المبيعات أو مشرف الإنتاج أو احتياجات مربى الماشية بأقل التكاليف.

***

الباب الرابع

التكلفة المثلى للنقل

Transportation Optimization

تعمل بحوث العمليات على إيجاد الحل الأمثل لمشكلات حركة العاملين، الإمدادات، المواد الخام والمنتجات النهائية، وتحل العديد من هذه المشكلات باستخدام البرامج الخطية، وبعض المشكلات الخاصة يمكن حلها بطرق التقريب (حذف وإضافة).

ويناقش هذا الباب المسائل الآتية:

1- مشكلة النقل Transportation Problem حيث المهمة هى تحديد الكمية التى ستشحن من كل منشأة (مصدر) إلى كل وجهة نهائية.

2- الشحن متعدد العبور Transshipment حيث المهمة هى تحديد المسار الأمثل Optimal route.

3- التكليف بالمهام Assignment وهى حالة خاصة من النقل حيث تتساوى عدد المصادر مع عدد النهايات.

4- صفوف الانتظار Waiting lines حيث عدد عمال التفريغ unloading crews أو الفضاء المخصص لأرصفة التفريغ يتوازن مع وقت انتظار تفريغ المنقولات.

أولا : مشكلة النقل

Transportation Problem

يتناول هذا الجزء من مشاكل النقل كحالة خاصة، ولكن، الأمثلة المعروضة لن تُرى بمنظور منعزل. وبدلا من ذلك فالنقل هو جزء من العملية الكلية، وسنتعامل من ذلك المنطلق مع نظام يكون النقل هو جزء منه، وبالإضافة سنرى أن الأساليب المعروضة فى هذا الكتاب يمكن تطبيقها على مشاكل النقل، وبمعنى آخر فإن الأساليب التى تتعامل مع مشاكل النقل يمكن استخدامها فى حل أنواع أخرى من المشكلات.

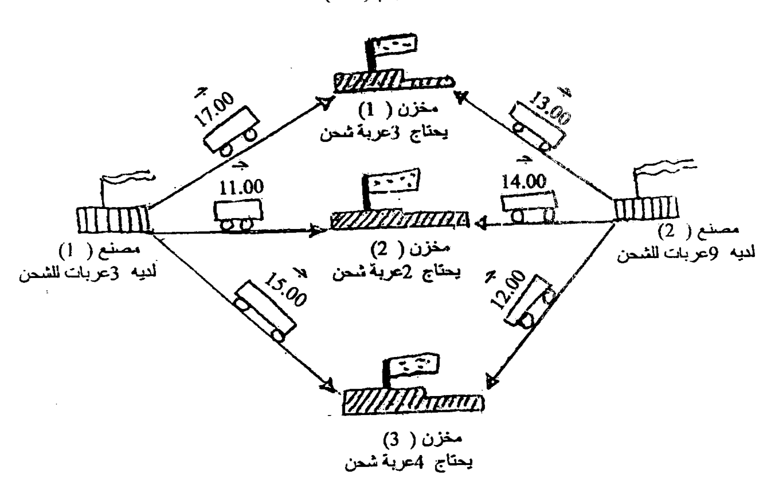
المشكلة المبدئية

يعرض الشكل (4-1) مشكلة نمطية للنقل. فعندنا مصنعين لإنتاج المايونيز. المصنع الأول لديه ثلاث عربات نقل جاهزة للشحن ، والمصنع الثانى لديه ستة عربات نقل جاهزة للشحن أيضا. وإضافة لذلك، فنرى أن هناك مخزن رقم (1) ويحتاج ثلاث عربات شحن ، ومخزن رقم (2) يحتاج عربتين للشحن، والمخزن رقم(3) يحتاج أربع عربات شحن.

كما يبين أيضا الشكل (4-1) أن تكلفة شحن عربة محملة بالمايونيز من المصنع رقم (1) إلى المخزن رقم (1) هى 17.00 جنيها ، وأن الشحن من المصنع رقم (1) إلى المخزن رقم (2) يتكلف 11.00 جنيها ، ومن المصنع رقم (1) إلى المخزن رقم (3) هو 15.00 جنيها. وأن الشحن من المصنع رقم (2) إلى المخزن رقم (1)، (2)، (3) يتكلف 13.00 جنيها، 14.000 جنيها و 12.00 جنيها على التوالى

لدينا الآن عدد 9 عربات شحن عند نقط المنشأ (الأصل) Points of origin (المصانع) ، ونحتاج إلى 9 عربات شحن للتوصيل إلى المحطات النهائية. فمشكلتنا هى تقرير كم من الشحنات من كل مصنع إلى كل مخزن لمقابلة احتياجاتنا (أى متطلبات المخازن) بدون تجاوز مواردنا (الكميات الممكن الحصول عليها من مصانعنا) ، ولكن الأكثر أهمية ليس فقط فى إستيفاء الإحتياجات الفيزيقية ، ولكن الوصول إلى خطة لتنفيذ هذه الأهداف بأقل التكاليف.

شكل رقم (4-1)



ويمكننا تصور أن هذه مشكلة برمجة خطية. ويعتبر نشاطا إمكانية ربط كل (مصدر origin - وصول destination) كتوليفة . ومستوى الأنشطة التى ستنقل من المصنع رقم (1) ستكون قيدا لتعكس ما مؤداه أن هناك فقط 3 عربات شحن موجودة فى المصنع رقم(1). وبالمثل، فما ينقل من المصنع رقم (2) لا يمكن أن يزيد عن حمولة ست عربات.

ويجب إضافة قيد للتأكيد على أنه على الأقل ذهاب حمولة 3 عربات إلى المخزن رقم (1)، كما يجب إضافة قيد للتأكيد على أنه على الأقل ذهاب حمولة 2 عربة إلى المخزن رقم (2). وأخيرا يجب توفر قيد للتأكيد على أنه على الأقل ذهاب حمولة أربع عربات إلى المخزن رقم (3). وما لم ينص على إدخال هذه القيود في المشكلة فلن نستطيع التأكد أن كل المعطيات قد إحتوتها المشكلة.

ويعرض الجدول (4-1) الجدول المبدئى لمشكلة تدنية تكاليف النقل، وتمثل الأعمدة أنشطة الشحن، ومن المهم أن يحتوى الجدول على كل طريقة من الشحن من المصانع (1) ، (2) إلى المخازن (1) ، (2) ، (3) ، وحتى التكاليف العالية للمسارات التى تبدو غير محتملة تدخل فى تشكيل الجدول المبدئى . ويجرى عمل ذلك لأنه، إذ احتواهم الجدول المبدئى ولكن لم يستخدموا فى الحل النهائى فإن تكلفة هذه المعلومات الزائدة تكون صغيرة. وعلى الجانب الآخر، فإذا حُذفت إمكانية شحن، فلن تعطى أى اهتمام وكقاعدة عامة، فالجدير عمله هو تضمين بدائل لأنشطة التى من غير المحتمل ظهورها، بدلاً من استبعادها.

جدول (4-1) الجدول المبدئى لتدنية تكاليف مشكلة النقل

C_j	-17	-11	-15	-13	-14	-12	مستوى
	P_1-W_1	P_1-W_2	P_1-W_3	P_2-W_1	P_2-W_2	P_2-W_3	النشاط
المصنع (1) P_1	1	1	1	0	0	0	≤ 3
المصنع (2) p_2	0	0	0	1	1	1	≤ 6
مخزن (1) W_1	1	0	0	1	0	0	≥ 3
مخزن (2) W_2	0	1	0	0	1	0	≥ 2
مخزن (3) W_3	0	0	1	0	0	1	≥ 4

(أنشطة الشحن: الأعمدة من P_1-W_1 إلى P_2-W_3)

يشير الجدول المبدئى (4-2) إلى طريقة السمبلكس لحل مشكلتنا متضمنا الأنشطة الحقيقية ، والأنشطة المتاحة، والأنشطة المصطنعة.

جدول (2-4) الجدول المبدئي لطريقة السمبلكس لمشكلة تدنية تكاليف النقل

		أنشطة حقيقية						أنشطة متاحة					أنشطة مصطنعة			مستوى النشاط
		P_1-w_1	P_1-w_2	P_1-w_3	P_2-w_1	P_2-w_2	P_3-w_3	P_1	P_2	W_1	W_2	W_3				
مخلوط الحل ↓	C_j ↓	-17	-11	-15	-13	-14	-12	0	0	0	0	0	-m	-m	-m	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	a_1	a_2	a_3	
X_7	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
X_8	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	6
$(w_1)\ a_1$	-m	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	3
$(w_2)\ a_2$	-m	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2
$(w_3)\ a_3$	-m	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	4
Z_j		-m	-m	-m	-m	-m	-m	0	0	m	m	m	-m	-m	-m	-9m
$Z_j - C_j$		-m+17	-m+11	-m+15	-m+13	-m+14	-m+12	0	0	m	m	m	0	0	0	-9m

P_i : مصنع

W_i : مخزن

وكان الحل بأقل التكاليف كالآتي.

يشحن المصنع رقم (1):

2 حمولة عربة نقل إلى المخزن رقم (2) بتكلفة 11.00 جنيه \ حمولة عربة = 22 جنيهاً

1 حمولة عربة نقل إلى المخزن رقم (3) بتكلفة 15.00 جنيه \ حمولة عربة = 15 جنيها

ويشحن المصنع رقم (2) :

3 حمولة عربة نقل إلى المخزن رقم (1) بتكلفة 13.00 جنيه \ حمولة عربة =39 جنيهاً

3 حمولة عربة نقل إلى المخزن رقم (3) بتكلفة 12.00 جنيه \ حمولة عربة = 36 جنيها

إجمالى التكلفة =112 جنيها

ولا يوجد نمط آخر من الشحن الذى يواكب متطلبات المخازن بدون تجاوز المتاح للمصانع، وبأقل تكلفة عن 112 جنيهاً.

هذا ومن ضمن الملاحظات عن هذه المشكلة التى انتهينا من حلها أن مجموع المعروض (9 عربات نقل عند المصنعين) يساوى بالضبط مجموع المتطلبات (9 عربات نقل عند الثلاث مخازن).فإذا زادت معروضاتنا عن المتطلبات، فبعضها كان سيترك عند مصنع واحد أوالاثنين. أما إذا زادت متطلباتنا عن المعروض، فالمشكلة ستكون بلا حل ممكن infeasible . ولما كان مجموع المعروض يساوى بالضبط مجموع المتطلبات، فليس من الضرورى تشكيل المشكلة بالعديد من عدم المتساويات. وأن كل المتطلبات ستستوفى بالشحن من المصنعين. ولا نحسب حسابا لعربات نقل غير مشحونة، أى لا ضرورة لتضمين أنشطة متاحة.

ويشير الجدول (4-3) إلى الجدول المبدئى لطريقة السمبلكس لمشكلتنا، وكل الصفوف فى صورة متساويات، أى أن الجدول المبدئى يتكون من أصفار وآحاد. وفى الواقع، فإذا توفر حاسب آلى وبه البرنامج الخطى العادى فمن السهل حل المشاكل العادية. أما إذا كانت المشكلة ضخمة (مثلاً ما يزيد على 400 صف، 1000 عمود) ويعاد استخدامها مرارا، فمن المفيد استخدام برنامج مكتوب مخصوص لتلك المشاكل، وهو يتواجد تجاريا فى الأسواق.

جدول (4-3) الجدول المبدئي لطريقة السمبلكس المعدلة لمشكلة تدنية تكاليف النقل

مخلوط الحل	C_j	أنشطة حقيقية P_1-W_1	P_1-W_2	P_1-W_3	P_2-W_1	P_2-W_2	P_3-W_3
		-17	-11	-15	-13	-14	-12
↓	↓	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$(P_1)\ a_1$	-m	1	1	1	0	0	0
$(p_2)\ a_2$	-m	0	0	0	1	1	1
$(w_1)\ a_3$	-m	1	0	0	1	0	0
$(w_2)\ a_4$	-m	0	1	0	0	1	0
$(w_3)\ a_5$	-m	0	0	1	0	0	1
Z_j		-2m	-2m	-2m	-2m	-2m	-2m
$Z_j - C_j$		-2m+17	-2m+11	-2m+15	-2m+13	-2m+14	-2m+12

مخلوط الحل	أنشطة مصطنعة a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	مستوى النشاط
C_j	-m	-m	-m	-m	-m	
$(P_1)\ a_1$	1	0	0	0	0	3
$(p_2)\ a_2$	0	1	0	0	0	6
$(w_1)\ a_3$	0	0	1	0	0	3
$(w_2)\ a_4$	0	0	0	1	0	2
$(w_3)\ a_5$	0	0	0	0	1	4
Z_j	-m	-m	-m	-m	-m	-18m
$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	-18m

P_i: مصنع

W_i: مخزن

ومن بين القصور المنسوب إلى استخدام البرمجة الخطية فى حل مشكلات نموذج النقل ، أنه يقود الإدارة إلى الظن بعدم استطاعتنا التقدم أكثر من ذلك. وعلى كل فمشكلات النقل هى فقط جزء من المشكلات التى تواجه الإدارة. ولما كان للمصنع رقم (2) تكلفة نقل اقل من الآخر، فلربما استطعنا توفير بعض الأموال إذا كان هناك وفر فى الإنتاج متاحا فى المصنع (2) وقليل عند المصنع رقم (1).

المشكلة السابقة معدلة لتتضمن الإنتاج

. فللإجابة على الأسئلة بشقيها من حيث كم يستطاع إنتاجه من كل مصنع، وكم يستطاع شحنه إلى كل مخزن من كل مصنع، فنحتاج إلى تعديل نموذج برنامجنا الخطى. فنموذجنا الحالى (جدول 4-1) يصف جانب النقل، ونحتاج إلى إضافة المعلومات الخاصة التى تصف العملية الإنتاجية.

يستخدم الجدول (4-4) الجدول المبدئى من البرمجة الخطية فى وصف الاحتمالات الإنتاجية فى المصنع رقم(1)، حيث يصف العمود الأول به تكلفة تصنيع المايونيز. وكل وحدة من هذا النشاط:

1- تتكلف 20 جنيها
2- تستخدم 10 ساعات عمالة
3- تستخدم 1 ساعة من وقت الخط الانتاجى للمصنع
4- تستخدم 20 جنيها من راس المال
5- تنتج 100 كرتونة

ويصف **العمود الثانى** من جدول (4-4) مدفوعات الوقت الاضافى حينما يزيد العمل عن عدد ساعات العمل الأسبوعية العادية. وكل وحدة من هذا النشاط:

1- تتكلف 6 جنيهات
2- تضيف 1 ساعة إلى العمالة الموجودة
3- لا تأثير لها على الطاقة الإنتاجية للمصنع
4- تستخدم 6 جنيهات من رأس المال
5- لا تأثير لها على عدد الكرتونات الناتجة

ملحوظة: الكرتونة Case تحتوى على 24 برطمان زجاجى.

جدول (4-4) الجدول المبدئى لتدنية تكاليف تصنيع المايونيز فى المصنع رقم (1)

مستوى النشاط	-0.10 اقتراض رأس المال	-6 مدفوعات الأجر الاضافى	-20 تصنيع المايونيز	
$\leq$ 200	0	-1	10	**العمالة**
$\leq$ 400	0	0	1	**طاقة المصنع (زمن التشغيل)**
$\leq$ 0	-1	6	20	**رأس المال**
$\geq$ 1800	0	0	100	**ما نحتاجه من كرتونات**

أما **العمود الثالث** فيصف رأس المال المقترض. وكل وحدة من هذا النشاط:

1- تتكلف 0.10 جنيه (بمعنى فائدة قدرها 10%)
2- لا تأثير له على العمالة
3- لا تأثير له على الطاقة الإنتاجية للمصنع
4- يضيف 1 جنيه إلى ما ننفقه من رأس المال
5- لا تأثير له على عدد الكرتونات الناتجة

أما **الجانب الأيمن** (مستوى النشاط) فيبين أننا:

1- لدينا 200 ساعة عمالة (5 رجال عند 40 ساعة لكل)
2- لدينا 40 ساعة من وقت الخط الانتاجى للمصنع
3- ليس لدينا رأسمال (بمعنى أن كل رأس المال سيقترض)
4- يجب أن ننتج 1800 كرتونة

ويحتاج **الأمر** إلى إنتاج 1800 عبوة من المايونيز لتزويد عربات الشحن فى المصنع رقم (1) (600 كرتونة لكل شاحنة). وبحل تدنية التكاليف لهذه المشكلة تبين لنا أنه فى المصنع رقم (1) يجب:

1- إنتاج 1800 كرتونة
2- اقتراض 360 جنيها كرأسمال
3- ترك 20 ساعة عمالة غير مستخدمة
4- ترك 22 ساعة من وقت الخط الانتاجى للمصنع بدون إنتاج
5- حدوث تكلفة قدرها 396 جنيها

ويبين الجدول (4-5) إمكانيات الإنتاج فى المصنع رقم (2) بطريقة مماثلة فى إطار البرمجة الخطية وأن حل تدنية التكاليف لهذه المشكلة فى المصنع رقم (2) يبين أننا:

1- ننتج 3600 كرتونة من المايونيز
2- نقترض 756 جنيها كرأسمال
3- ترك صفر ساعة عمالة غير مستخدمة
4- ترك 4 ساعات من وقت الخط الانتاجى للمصنع بدون انتاج
5- حدوث تكلفة قدرها 831.60 جنيها

جدول (4-5) الجدول المبدئى لتدنية تكاليف تصنيع المايونيز فى المصنع رقم (2)

	-0.10 افتراض رأس المال	-6 مدفوعات الأجر الاضافى	-21 تصنيع المايونيز	
≤ 360	0	-1	10	العمالة
≤ 40	0	0	1	طاقة المصنع (زمن التشغيل)
≤ 0	-1	6	21	رأس المال
≥ 3600	0	0	100	ما نحتاجه من كرتونات

وبتجميع الثلاث حلول لتدنية التكاليف من الجداول (4-1)، (4-4)، (4-5) نجد:

1- المصنع رقم (1)

أ- ينتج 1800 كرتونة (بمعنى 3 شاحنات) = 396.00 جنيها
ب- تشحن حمولة 3 عربات إلى المخزن رقم (2) = 22.00 جنيها
جـ- تشحن حمولة 1 عربة إلى المخزن رقم (3) = 15.00 جنيها

2- المصنع رقم (2)

أ- ينتج 3600 كرتونة (بمعنى 6 شاحنات) = 831.60 جنيها
ب- تشحن حمولة 3 عربات إلى المخزن رقم (1) = 39.00 جنيها
جـ- تشحن حمولة 3 عربات إلى المخزن رقم (3) = 36.00 جنيها

اجمالى تكاليف الإنتاج والنقل = 1339.60

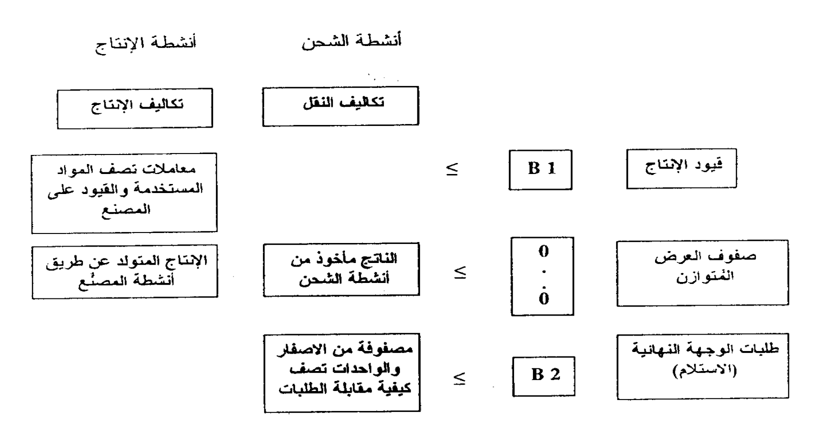
وعلى كل، فالنشاط الأمثل عند كل مستوى من المؤسسة قد يكون دون المثالية suboptimal من وجهة نظر المؤسسة ككل. وفى هذه الحالة فقد وجدنا أقل تكلفة لإنتاج 1800 عبوة فى المصنع رقم (1) [وعرضت المشكلة فى جدول (4-4)]، وتكلفة إنتاج 3600 عبوة فى المصنع رقم (2) [وعرضت المشكلة فى الجدول (4-5)]، وكانت أقل تكلفة للشحن لثلاث عربات (1800كرتونة) من المصنع رقم

(1)، وستة عربات شحن (3600 كرتونة) من المصنع رقم (2) للثلاث مخازن [وعرضت المشكلة فى جدول (4-1)].

فإذا نظرنا إلى هذه المشاكل الثلاث المنفصلة كجزء من مشكلة أكبر، فنستطيع تحديد أقل تكلفة للإنتاج والشحن (التوزيع) اللذين نحتاجهما لمواجهة متطلبات المخازن.

ويعرض الشكل (4-2) طبيعية وهيكل المشكلة مجتمعة. والمكون الاساسى هو أنه لدينا مشكلتين مستقلتين (الإنتاج والشحن) مربوطتين معاً بمجموعة من صفوف العرض المتوازن Balanced Supply.

شكل (4-2) طبيعة وهيكل مشكلة الإنتاج والشحن مجتمعين



ويبين الجدول (4-6) الجدول المبدئى للمشكلة المشتركة للإنتاج والشحن، و أن البيانات المذكورة فى جداول (4-1)، (4-4)، (4-5) قد استخدمت فى تشكيل الجدول (4-6).

وتصف الأعمدة الخمسة الأولى من هذا الجدول إنتاج المايونيز فى مصنعينا. ويصف العمود الأول إنتاج المايونيز فى المصنع (1). ويماثل هذا العمود لنظيره العمود الأول من الجدول (4-4). وتضيف وحدة واحدة من هذا النشاط 100 كرتونة من المايونيز إلى رصيدنا فى المصنع (1). ومخزوننا الحالى هو الصفر كما يرى على الجانب الأيمن لقيمة هذا الصف "المعروض فى المصنع(1)" حيث يقتفى أثر كم من إنتاج المايونيز متوفر للشحن من المصنع (1). ويصف العمود الثانى من الجدول (4-6) تأجير العمالة للوقت الاضافى فى المصنع (1) وهذا العمود يماثل نظيره فى العمود الثانى من الجدول (4-4)، وهكذا حتى العمود الرابع.

يصف العمود الخامس اقتراض النقود لتمويل إنتاج المايونيز للمصنعين (1)، (2)، وفى هذا المثال ، فقد أفترضنا أن المصنعين تحت إدارة واحدة ويستخدم مصدر واحد لرأس المال العامل. فإذا كان المصنعان يواجهان فوائد مختلفة لرأس المال ، أو لأى سبب آخر ، ونريد فصل حسابات رأس المال العامل ، فيعمل ذلك بإيجاد نشاطين إقتراضيين (بمعنى: إقتراض رأسمال للمصنع (1) وإقترض رأسمال للمصنع (2) .

وكان الغرض من استخدام حساب موحد هو لبيان أنه عند إدماج مشاكل تحتية subproblems فى مشكلة أكبر ، بمعنى : جدول (4-4) ،(4-5) فى جدول (4-6) ، فإنه من المؤكد أن أنشطة رئيسية ستتندمج فى نشاط واحد – وفى حالتنا هذه إقتراض رأس المال العامل.

أما الاعمدة الستة الباقية فتصف جزء النقل من مشكلتنا [بمعنى البيانات من جدول (4-1)]. وعلى كلا ، فعند ضم النقل من مشكلتنا إلى المشكلة المشتركة من الانتاج والنقل ، فيجب أن نتأكد من أن وحداتنا متسقة داخليا.

وفى حالتنا ، يصف العمود الاول من جدول (4-6) تصنيع المايونيز فى المصنع (1)، وتضيف وحدة واحدة من هذا النشاط 100 كرتونة إلى المخزون فى المصنع (1) [(بمعنى : وضعنا القيمة (-100) فى الخانه المعنية والتى تصل العمود الاول بصف المعروض فى المصنع (1)] . وبنفس المنهج ، فالعمود السادس من الجدول (4-6): $(p_1 - w_1)$ يصف الشحن لعربة واحدة من المصنع (1) إلى المخزن (1) . والطلب عند المخزن (1) مذكور فى صورة شاحنات ، ونتيجة لذلك فقد وضعنا (واحد) فى الخانة المعنية والتى تصل نشاط الشحن $(p_1 - w_1)$ بصف" الطلب عند المخزن (1)" . وعلى كل ، "فعرضنا عند المصنع (1)" مذكور فى صورة كرتونات من المايونيز ، ومع كل 600 كرتونة من المايونيز للشاحنة ، فكل وحدة من العمود "$(p_1 - w_1)$" ستأخذ 600 كرتونة بعيدا من المصنع (1) . وبنفس الفكرة ، فتصف الأعمدة الخمسة الباقية جميع الشحنات الممكنة من المصنعين (1)، (2) إلى المخازن (1) ، (2) ، (3) .

ولكى نظهر بوضوح أكثر كيفية ادماج المشاكل الثلاث المذكورة فى جداول (4-1) ، (4-4) ، (4-5) فى مشكلة مشتركة ، فالشكل (4-3) يبين المشكلة المشتركة ، الانتاج – النقل كما عرضت فى جدول (4-6) ، ومن خلال إطار عمل يلقى الضوء على كيفية الوصل بين مكونات المشكلة ، وبنفس الفكرة ، فإن كل تركيب مؤسسى قد يصاغ فى مشكلة موحدة من خلال استخدام صفوف التحويل كما فعلناها هنا.

ويقارن الجدول (4-7) الحل لمشكلتنا عند حل الثلاث مشاكل منفصلة (من الجداول (4-1) ، (4-4) ، (4-5) ، وحل المشكلة المشتركة فى جدول (4-6) وفى هذه الحالة سادت التكلفة الانتاجية المنخفضة فى المصنع رقم (1) على التكلفة النقل المنخفضة للمصنع (2) ، فانخفاض التكلفة الكلية للإنتاج والنقل يمكن تحقيقها بزيادة الانتاج فى المصنع (1) بمقدار 200 كرتونة وتقليل الانتاج فى المصنع (2) بمقدار 200 كرتونة ، وشحن الإنتاج المتزايد من المصنع (1) إلى المخزن (3) . وقام

المصنع (2) بتخفيض تعويضى فى شحناته إلى المخزن (3). وكان صافى المدخرات الناتجة عن تغيير نمط الإنتاج والشحن هو 1.20 جنيها (1339.6 -1338.40) ولم تكن تكلفة الحل المشترك بأكثر كثيرا مما تحقق عن طريق الحلول المنفصلة (4-1) ، (4-4) ، (4-5) حيث إستطاع الحل المشترك أداء كل عمل الانشطة التى أداها الثلاثة. وعلى الجانب الآخر ، تمكن الحل المشترك من إكتشاف مميزاته التى لم تكن نتحصل عليها عند الحل المستقل لكل مشكلة تحتية. وعلى كل ، فالسبب فى ادماج مشكلتى الإنتاج والتصنيع راجع إلى تساؤلنا لقرار إنتاج 1800 كرتونة من المايونيز فى المصنع (1) و 3600 كرتونة فى المصنع (2) مدخلين فى الاعتبار تكاليف النقل. فلقد أظهر الحل للمشكلة المشتركة أن تغيير جدول الانتاج والنقل سيخفض تكلفتنا. وبنفس الفكر فقد نتساءل المتطلبات من شحن 3 ، 2 ، 4 ، عربات إلى المخازن (1) ، (2) ، (3)، على التوالى.

جدول (6-4) الجدول المبدئى لمشكلة الإنتاج والنقل ، المشتركة

	-20 تصنيع المايونيز مصنع (1)	-6 مدفوعات الاجر الاضافى مصنع (1)	-21 تصنيع المايونيز مصنع (2)	-6 مدفوعات الاجر الاضافى مصنع (2)	-0.10 إقتراض رأس المال	-17 P_1-W_1	-11 P_1-W_2	-15 P_1-W_3	-13 P_2-W_1	-14 P_2-W_2	-12 P_2-W_3		
العمالة فى مصنع 1	10	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	≤	200
الطاقة الزمنية فى مصنع 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	≤	40
العمالة فى مصنع 2	0	0	10	-1	0	0	0	0	0	0	0	≤	360
الطاقة الزمنية فى مصنع 2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	≤	40
رأس المال	20	6	21	6	-1	0	0	0	0	0	0		0
المعروض عند مصنع 1	-100	0	0	0	0	600	600	600	0	0	0		0
المعروض عند مصنع 2	0	0	-100	0	0	0	0	0	600	600	600		0
الطلب عند المخزن 1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0		3
الطلب عند المخزن 2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0		2
الطلب عند المخزن 3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	≤	4

شكل (3-4) مشكلة انتاج ونقل المايونيز فى تركيبية مشتركة

	تصنيع من مصنع 1	أجر إضافى مصنع 1	تصنيع من مصنع 2	اجر إضافى مصنع 2	إقتراض	p_1-w_1	p_1-w_2	p_1 w_3	p_2- w_1	p_2 -w_2	p_2-w_3		
	-20	-6	-21	-6	0.10-	-17	-11	- 15	-13	-14	- 21		
العمالة فى المصنع 1	10	-1	0	0	0							≤	20
الطاقة الزمنية فى مصنع 1	1	0	0	0	0							≤	0
العمالة فى مصنع 2	0	0	10	- 1	0							≤	40
الطاقة الزمنية فى مصنع 2	0	0	1	0	0							≤	36
رأس المال	20	6	21	6	-1							≤	0
												≤	40
المعروض فى مصنع 1	- 100	0	0	0	0	600	600	600	0	0	0	≤	0
المعروض فى المصنع 2	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	600	600	≤	0
الطلب عند المخزن 1						1	0	0	1	0	0	≤	3
الطلب عند المخزن 2						0	1	0	0	1	0	≤	2
الطلب عند المخزن 3						0	0	1	0	0	1	≤	1

جدول (4-7) مقارنة حلول مشاكل الإنتاج والنقل منفصلة، مع المشكلة المشتركة بينهما

الحل المشترك من الجدول (4-6)		الحل كثلاث مشاكل منفصلة من الجداول (4-1) و (4-4) و (4-5)	
المصنع 1		المصنع 1	
	جنيه		جنيه
أ - ينتج 2000 كرتونة	440.00 =	أ- ينتج 1800 كرتونة (بمعنى 3 شاحنات)	396.000 =
ب- شحن حمولة 2 عربة إلى المخزن 2	22.00 =	ب - شحن حمولة 2 عربة إلى المخزن 2	22.00 =
جـ - شحن حمولة 1.33 عربة إلى المخزن 3	20.00 =	جـ - شحن حمولة 1 عربة إلى المخزن 3	15.00 =
المصنع 2		المصنع 2	
أ - ينتج 3400 كرتونة	785.40 =	أ - ينتج 3600 كرتونة (بمعنى 6 شاحنات)	831.60 =
ب - شحن حمولة 3 عربات إلى المخزن 1	39.00=	ب - شحن حمولة 3 عربات إلى المخزن 1	39.00 =
جـ - شحن حمولة 2.67 عربة إلى المخزن 3	22.00 =	جـ - شحن حمولة 3 عربات إلى المخزن 3	36.00 =
جملة التكاليف	**1338.40**	**جملة التكاليف**	**1339.60**

المشكلة السابقة معدلة لتتضمن الإنتاج والتسويق

نفترض أن لدينا ثلاثة أسواق في كل منطقة بيع. ويبين الشكل (4-4) جدول المبيعات للسوق الأول و الثاني، والثالث في كل من مناطق البيع الثلاثة، وحيث نجد أن 100 كرتونة الأولى بيعت في المنطقة (1) بسعر 35.00 جنيها \ 100 كرتونة، 500 كرتونة التالية بيعت إلى زبائن ثانويين بسعر 30.00 جنيها \ 100 كرتونة، وما تبقى بيع بسعر 25.000 جنيها \ 100 كرتونة.

وتتضمن خطتنا التسويقية 1800 كرتونة (حمولة 3 عربات) لتباع في المنطقة (1) بإجمالي إيراد قدره 575.00 جنيهاً (بمعنى : 1000 كرتونة بسعر 35 جنيها \ 100 كرتونة + 500 كرتونة بسعر 30 جنيهاً \ 100 كرتونة + 300 كرتونة بسعر 25 جنيها \ 100 كرتونة) .

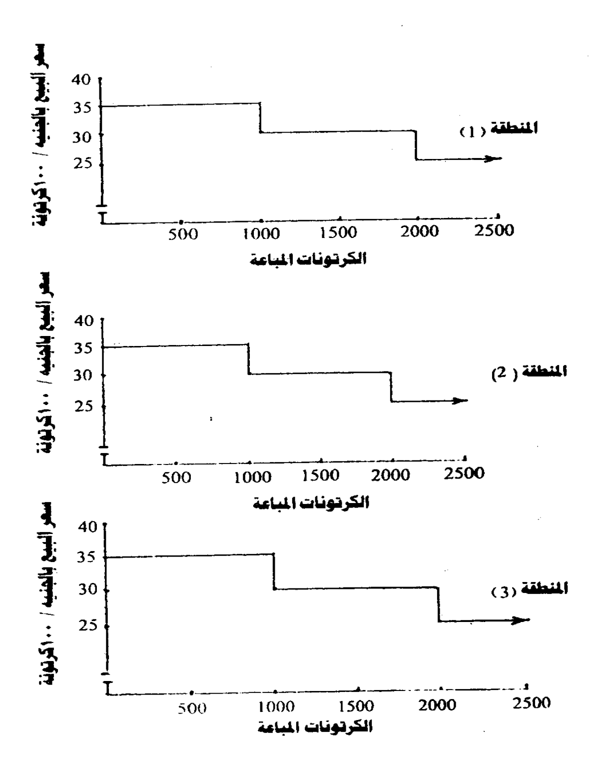
وتشير المنطقة (2) إلى طلب مماثل للمنطقة (1). كما تتضمن خطتنا التسويقية الحالية 1200 كرتونة (حمولة 2 عربة) لتباع في المنطقة (2) بإجمالي إيراد قدره 410 جنيها (بمعنى: 1000 كرتونة بسعر 35 جنيهاً \ 100 كرتونة + 200 كرتونة بسعر 30 جنيها \ 100 كرتونة).

أما المنطقة (3) فهي رقعة تسويقية أكبر ، فإن 1000 كرتونة الأولى تباع بسعر 35 جنيهاً \ 100 كرتونة، 1000 التالية تباع إلى زبائن ثانويين بسعر 30 جنيها \ 100 كرتونة، وما تبقى يباع بسعر 25 جنيها \ 100 كرتونة. وتتضمن خطتنا التسويقية الحالية 2400 كرتونة (حمولة 4 عربات) بإجمالي إيراد قدره 750 جنيهاً (بمعنى: 1000 كرتونة بسعر 35 جنيها \ 100 كرتونة + 1000 كرتونة بسعر 30 جنيهاً \ 100 كرتونة + 400 كرتونة بسعر 25 جنيها \ 100 كرتونة).

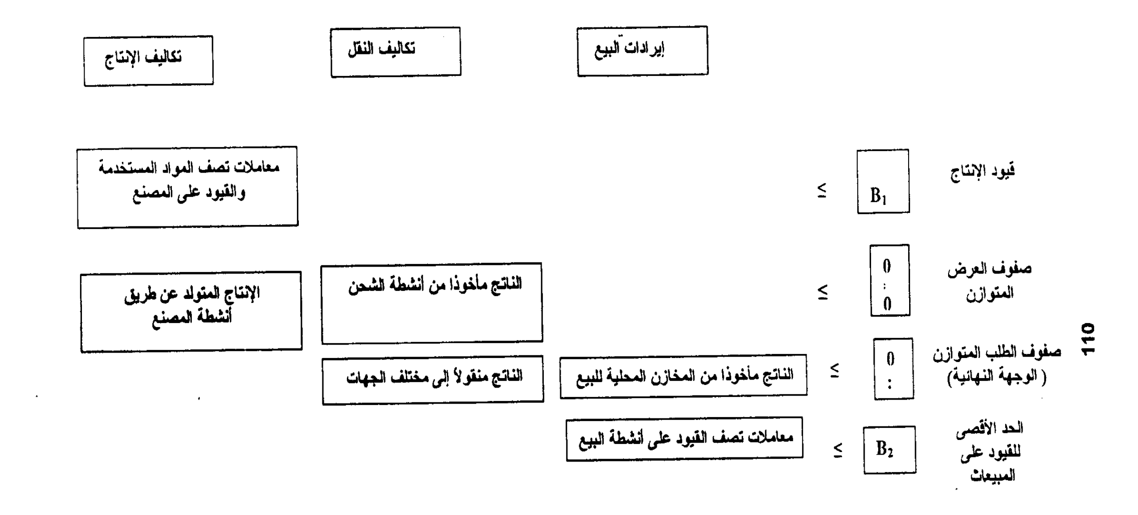
وسيكون ممكنا محاولة وضع إطار لتحليل التعادل لكل سوق، مدخلين في الاعتبار تكلفة الإنتاج والنقل. وعلى كل، فيمكننا مد نموذجنا من البرمجة الخطية ليتضمن عملية البيع بالإضافة إلى الإنتاج والنقل. وقد تعرضت الأبواب السابقة لأنشطة البيع، وقد أوضحت تلك الفصول كيفية شراء العمالة أو الموارد الأخرى بتكلفة متزايدة. واستحداث أنشطة البيع الذي نجابه انخفاضا في الأسعار، هي بنفس الدرجة من التناول المباشر.

ويبين الشكل (4-5) الإطار العام للجدول المبدئي لمشكلة تتعلق بالربط بين الإنتاج والنقل والتسويق في مشكلة واحدة.

شكل (4-4) احتمالات البيع حسب مناطق التسويق



شكل(4-5) الإطار العام للجدول المبدئى الذى يربط الإنتاج والنقل والتسويق فى مشكلة واحدة



ويعرض الجدول (4-8) الجدول المبدئى للمشكلة المشتركة (الإنتاج – النقل – التسويق). وتصف الخمسة أعمدة الأولى إنتاج المايونيز فى المصنعين (1) و (2). وهذه الأعمدة هى نفسها الخمسة أعمدة الأولى فى جدول (4-6).

أما الأعمدة 6-11 من جدول (4-8) فتصف إمكانيات الشحن من المصنعين (1) و (2) إلى المخازن (1) و (2) و (3). وهذه الأعمدة هى نفسها 6-12 فى جدول (4-6)، بالرغم من تغير مظهرهم. وفى جدول (4-6) تعرّف الصفوف الثلاث الأخيرة من الجدول المبدئى بأنها طلبات مخازننا الثلاث معبرا عنها بعربات الشحن، زد على ذلك معرفتنا كم عدد عربات الشحن التى يحتاجها كل مخزن

فى جدول (4- 8) ينحصر جزء من مشكلتنا فى تحديد الكمية التى ستشحن لكل مخزن، وكنتيجة لذلك، فبدلاً من تعريف صفوف طلباتنا معبرا عنها فى صورة عربات الشحن التى تحتاجها المخازن (1) ، (2) ، (3) ، فسنعرّف ثلاثة صفوف لتصف الكميات المتاحة للبيع عند المخازن المذكورة . وبالرغم من أن التعريف لهذه الصفوف قد يكون معبرا عنه فى صورة عربات الشحن، فإنه يكون أيسر تناولاً لو عبّر عنه بكرتونات المايونيز. والأثر النهائى لهذا التعريف الجديد هو فى التحول من ثلاث صفوف فى جدول (4-6) (كل منها كان قيداً ذى حد أدنى) التى أوضحت الشحنات المطلوبة إلى ثلاث صفوف فى جدول (4-8) (كل منها يكوّن قيدا ذى حد أقصى) الذى يفيدنا بعدم وجود مخزون مبدئى فى المخازن (1) و (2) و (3)، ولكن يزودنا بالآلية لاقتفاء أثر كم هو متاح للبيع عند مخازننا الثلاثة.

أما الأعمدة من 12-20 من جدول (4-8) فهى جديدة ، إذ تصف نشاط البيع الذى يمكن حدوثه فى كلل من مناطق التسويق ، ويمثل كل عمود بيع 100 كرتونة من المايونيز ، وكنتيجة لذلك فكل وحدة من نشاط البيع تأخذ 100 كرتونة من أحد مخازننا الثلاثة .

ويصف **العمود 12** المبيعات فى المنطقة (1) إلى عملائنا من المرتبة الأولى. فكل وحدة من هذا النشاط:

1- تدر عائداً قدره 35 جنيهاً

2- تأخذ 100 كرتونة من المخزن (1)

3- تستخدم 100 كرتونة من 1000 كرتونة التى يمكن بيعها إلى عملاء المرتبة الأولى فى المنطقة (1). ويصف **العمود 13** المبيعات فى المنطقة (1) إلى عملائنا من المرتبة الثانية ، وكل وحدة من هذا النشاط :

1- تورد عائداً قدره 30 جنيهاً

2- تأخذ 100 كرتونة من المخزن (1)

3- تستخدم 100 كرتونة من 500 كرتونة التى يمكن بيعها إلى عملاء المرتبة الثانية فى المنطقة (1)

ويصف **عمود 14** المبيعات فى المنطقة (1) **إلى عملائنا من المرتبة الثالثة** ، وكل وحدة من **هذا النشاط** :

1- تدر عائدا قدره 25 جنيها

2- تأخذ 100 كرتونة من المخزن 1

ويلاحظ أن أنشطة البيع الثلاثة تأخذ كرتونات **المايونيز** من المخزن 1 ،**ولا يوجد بداية** مخزون فى **المخزن** (1) حيث أن له **قيمة** صفرية فى **الجانب الأيمن (مستوى النشاط)** من الصف "العرض فى مخزن 1". **فالطريقة** الوحيدة التى يمكن **بها بيع المايونيز هى من خلال الأنشطة** التى تشحن إلى **المخزن** (1) (بمعنى : الأعمدة "p1 –w1" **و** "p2 – w1" **من جدول** (4-8) ، وبالتالى فأنشطة **الشحن تسحب احتياجها من الإنتاج المتواجد فى المصنعين** (1) , (2). **وعلى كل** ، فإن المخزون **المبدئى فى مصانعنا هو** الصفر . وما **يتاح للشحن فهو من خلال الأنشطة الإنتاجية** ، بمعنى : "أعمدة **التصنيع فى** المصنع (1) " و "**أعمدة** التصنيع **فى المصنع** (2) **" من جدول** (4-8) . وبهذه الطريقة فإن **أنشطة البيع** تنصب على أنشطة الشحن ، **ومن خلالهم أنشطة الإنتاج ، ومن ثم فهذا** يستدعى الإنتاج اللازم والشحن لتعظيم صافى الربح ، **وينتج عمن ذلك استمرارية تقييم كل** التفضيلات الممكنة tradeoffs وما تتضمنه من زيادة **أو تقليل المبيعات الكلية** .

ولقد قيَّدنا مبيعاتنا إلى عملاء الدرجة **الأولى حيث** أن **مراقبى أسواقنا أوضحوا** أنه فى المنطقة (1) **لا يستطيع** أن نبيع إلا 1000 كرتونة **فقط** بسعر 35 **جنيه \ 100 كرتونة ، كما قيدنا** أيضا مبيعاتنا إلى **عملاء** الدرجة الثانية حيث أتضح أنه **يمكننا بيع** 500 **كرتونة فقط بسعر 30 جنيها** \ 100 كرتونة . ولم **نضع قيداً** على مبيعاتنا بسعر 25 جنيهاً \ 100 **كرتونة حيث أفترض من وجهة** نظرنا أن هذا السوق لا **حدود له** . وعلى كل ، فنستطيع إذا **اقتضت الضرورة وضع قيد على هذه المبيعات** . وبنفس الأداء . فالأعمدة 15-17 تصف المبيعات فى **المنطقة** (2) ، **والأعمدة 18-20** تصف المبيعات فى **المنطقة** (3) .

وبيين الشكل (4-6) المشكلة المشتركة (إنتاج – نقل – بيع) **للجدول** (4-8) فى صورة إطار عام . ويصور الشكل (4-6) كيفية ربط أنشطة الإنتاج والشحن بصفوف "**العرض** عند المصنع" كما يظهر كيفية ربط أنشطة الشحن والبيع بصفوف " العرض عند المخزن. " ومن خلال تلك الصفوف الرابطة . نستطيع ربط كل هذه الأنشطة .

ويقارن الجدول (4-9) الحل لمشكلة إنتاجنا وشحننا ، و مبيعاتنا كما عرضت فى جدول (4-8) مع الحلين السابقين المشار إليهما فى جدول (4-7) . ففى الجدول (4-7) قارننا تكلفة الإنتاج مضافا إليه الشحن ، حينما كانت المبيعات معطاه ، ولما كان الإيراد هو نفسه فى **الحالتين** ، فلقد قارننا فقط التكاليف للخطتين . ولما كانت إستراتيجية تسويقنا هى الآن جزء من المشكلة ، فإن إيراد المبيعات ، و التكاليف الكلية ، وصافى الربح يجب أن يؤخذوا جميعاً فى الاعتبار .

ويعرض الجدول (4-9) خطط التسويق والإيرادات لكل من مشاكلنا الثلاثة ، فعلى سبيل المثال في المشكلتين الأوليتين ، كانت خططنا التسويقية معطاه ، إذ كان علينا أن نبيع 1800 كرتونة في المنطقة (1) مضافاً إليها 1200 كرتونة في المنطقة (2) ، مضافاً إليها 2400 كرتونة في المنطقة (3) محققين إيرادا إجماليا قدره 1735 جنيهاً . ولكن ، عندما أدمجت المبيعات كجزء من المشكلة ، فقد تقلصت المبيعات في المنطقة (1) إلى 1500 كرتونة ، وزادت المبيعات إلى 2000 كرتونة فى المنطقة (2) ، وانخفضت المبيعات في المنطقة (3) إلى 2000 كرتونة ، وزاد إجمالي الايراد بمقدار 40 جنيهاً من 1735 جنيهاً إلى 1775 جنيهاً .

هذا ولو أن إجمالي الإيراد زاد بمقدار 40 جنيهاً ، فقد زاد صافي الربح بمقدار 20.73 جنيهاً فقط . ولم تكن الزيادة في صافي الربح كبيرة مثل الزيادة في إجمالي الإيراد ، ذلك لأن الإنتاج الكلي زاد من 5400 كرتونة إلى 5500 كرتونة . ويبين الحل النهائي أن المصنع رقم (1) ينتج بكامل طاقته . ولكن المصنع رقم (2) لم يكن ينتج بكامل طاقته ، حتى ولو كانت هناك إمكانيات لإجراء مبيعات إضافية . ويقيّم البرنامج الخطي الإيراد من المبيعات الممكنة المستقبلية أمام الإنتاج مضافاً إليه تكلفة النقل ، ويختار عدم الإنتاج.

جدول (4-8) الجدول المبدئي للمشكلة المشتركة (الإنتاج والنقل والبيع) (الجزء الأيسر)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
	-20	-6	-21	-6	-0.10	-17	-11	-15	-13	-14	-12
	تصنيع المايونيز مصنع 1	مدفوعات الأجر الاضافي مصنع 1	تصنيع المايونيز مصنع 2	مدفوعات الأجر الاضافي مصنع 2	اقتراض رأس المال	P1-W1	P1 -W2	P1 -W3	P2 -W1	P2-W2	P2 -W3
العمالة فى مصنع 1	10	-1	0	0	0						
الطاقة الزمنية - مصنع 1	1	0	0	0	0						
العمالة فى مصنع 2	0	0	10	-1	0						
الطاقة الزمنية - مصنع 2	0	0	1	0	0						
رأس المال	20	6	21	6	-1						
المعروض من مصنع 1	-100	0	0	0	0	600	600	600	0	0	0
المعروض من مصنع 2	0	0	-100	0	0	0	0	0	600	600	600
المعروض عند مخزن 1						-600	0	0	-600	0	0
المعروض عند مخزن 2						0	-600	0	0	-600	0
المعروض عند مخزن 3						0	0	-600	0	0	-600
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 1											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 1											
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 2											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 2											
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 3											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 3											
	النشاط الانتاجي					أنشطة النقل					

Pi = مصنع   Wi = مخزن

تكملة جدول (4-8) الجزء الأيمن منه فى توالى الأعمدة

(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)			
35	30	25	35	30	25	35	30	25			
بيع 1 عند مخزن 1	بيع 2 عند مخزن 1	بيع 3 عند مخزن 1	بيع 1 عند مخزن 2	بيع 2 عند مخزن 2	بيع 3 عند مخزن 2	بيع 1 عند مخزن 3	بيع 2 عند مخزن 3	بيع 3 عند مخزن 3			
									≤	200	القيود الإنتاجية
									≤	40	
									≤	360	
									≤	40	
									≤	0	
									≤	0	صفوف موازنة المعروض
									≤	0	
100	100	100	0	0	0	0	0	0	≤	0	صفوف موازنة جهات الوصول
0	0	0	100	100	100	0	0	0	≤	0	
0	0	0	0	0	0	100	100	100	≤	0	
100	0	0	0	0	0	0	0	0	≤	1000	أقصى قيود للبيع
0	100	0	0	0	0	0	0	0	≤	500	
0	0	0	100	0	0	0	0	0	≤	1000	
0	0	0	0	100	0	0	0	0	≤	500	
0	0	0	0	0	0	100	0	0	≤	1000	
0	0	0	0	0	0	0	100	0	≤	1000	
أنشطة البيوع											

جدول(4-9) مقارنة للإيراد ، والتكاليف (جنيه) والربح لثلاث خطط مختلفة للمؤسسة (الجزء الأيسر)

الحل لمشكلة الإنتاج والنقل المشترك فى جدول (4-6) والمبيعات معطاه		حل المشكلات الثلاث منفصلة من جداول (4-1) ، (4-4) ، (4-5) والمبيعات معطاه	
*الإيــــراد		*الإيــــراد	
* مخـــزن 1		* مخـــزن 1	
بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	=350.00 جنيه	بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 500 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	=150.00 جنيه	بيع 500 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 150.00 جنيه
بيع 300 كرتونة بسعر 25 جنيه / 100 كرتونة	75.00 جنيه	بيع 300 كرتونة بسعر 25 جنيه / 100 كرتونة	= 75.00 جنيه
* مخـــزن 2		* مخـــزن 2	
بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه	بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 200 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 60.00 جنيه	بيع 200 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 60.00 جنيه
* مخـــزن 3		* مخـــزن 3	
بيع 1000 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه	بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 1000 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 300.00 جنيه	بيع 1000 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	=300.00 جنيه
بيع 400 كرتونة بسعر 25 جنيه / 100 كرتونة	= 100.00 جنيه	بيع 400 كرتونة بسعر 25 جنيه / 100 كرتونة	= 100.00 جنيه
جـمـلـة الإيــــراد	= 1735.00 جنيه	جـمـلـة الإيــــراد	=1735.00 جنيه
*الـتـكـالـيـف		الـتـكـالـيـف	
* مصنـع 1		* مصنـع1	
ينتج 2000 كرتونة	= 440.00 جنيه	ينتج 1800 كرتونة	= 396.00 جنيه
شحن حمولة 2 عربة إلى مخزن 2	= 22.00 جنيه	شحن حمولة 2 عربة إلى مخزن 2	= 22.00 جنيه
شحن حمولة 1.33 عربة إلى مخزن 3	= 20.00 جنيه	شحن حمولة 1 عربة إلى مخزن 3	= 15.00 جنيه
* مصنـــع 2		* مصنـــع 2	
ينتج 3400 كرتونة	= 785.40 جنيه	ينتج 3600 كرتونة	= 831.60 جنيه
شحن حمولة 3 عربة إلى مخزن 1	= 39.00 جنيه	شحن حمولة 3 عربة إلى مخزن 1	= 39.00 جنيه
شحن حمولة 2.67 عربة إلى مخزن 3	= 32.00 جنيه	شحن حمولة 3 عربة إلى مخزن 3	= 36.00 جنيه
جـمـلـة الـتـكـالـيـف	= 1338.40 جنيه	جـمـلـة الـتـكـالـيـف	= 1339.60 جنيه
صـافـى الـربـح	= 396.60 جنيه	صـافـى الـربـح	= 395.40 جنيه

تكملة جدول(4-9) الجزء الأيمن

الحل المتكامل لمشكلة الإنتاج والنقل والمبيعات من جدول (4-6)	
الإيراد	
* مخزن 1	
بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 500 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 150.00 جنيه
* مخزن 2	
بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 10 سكرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 500 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 150.00 جنيه
بيع 500 كرتونة بسعر 25 جنيه / 100 كرتونة	= 125.00 جنيه
* مخزن 3	
بيع 1000 كرتونة بسعر 35 جنيه / 100 كرتونة	= 350.00 جنيه
بيع 1000 كرتونة بسعر 30 جنيه / 100 كرتونة	= 300.00 جنيه
جملة الإيراد	= 1775.00 جنيه
التكاليف	
* مصنع 1	
ينتج 2000 كرتونة	= 440.00 جنيه
شحن حمولة 3.33 عربة إلى مخزن 2	= 36.67 جنيه
* مصنع 2	
ينتج 3500 كرتونة	= 808.50 جنيه
شحن حمولة 2.5 عربة إلى مخزن 1	= 32.5 جنيه
شحن حمولة 3.33 عربة إلى مخزن 3	= 40.00 جنيه
جملة التكاليف	= 1357.67 جنيه
صافى الربح	= 417.33 جنيه

شكل (4-6) الحل المشترك لمشكلة الإنتاج - الشحن - البيع (الجزء الأيسر)

	أنشطة الإنتاج					أنشطة الشحن					
	-20	-6	-21	-6	-0.10	-17	-11	-15	-13	-14	-12
	التصنيع مصنع 1	مدفوعات الأجر الإضافي مصنع 1	التصنيع مصنع2	مدفوعات الأجر الإضافي مصنع 2	إقتراض رأس المال	P1-W1	P1-W2	P1-W3	P2-W1	P2-W2	P2-W3
العمالة في مصنع 1	10	-1	0	0	0						
الطاقة الزمنية - مصنع 1	1	0	0	0	0						
العمالة في مصنع 2	0	0	10	-1	0						
الطاقة الزمنية - مصنع 2	0	0	1	0	0						
رأس المال	20	6	21	6	-1						
المعروض عند مصنع 1	-100	0	0	0	0	600	600	600	0	0	0
المعروض عند المصنع 2	0	0	-100	0	0	0	0	0	600	600	600
المعروض عند مخزن 1						-600	0	0	-600	0	0
المعروض عند مخزن 2						0	-600	0	0	-600	0
المعروض عند مخزن 3						0	0	600-	0	0	600-
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 1											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 1											
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 2											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 2											
أقصى مبيعات 1 عند مخزن 3											
أقصى مبيعات 2 عند مخزن 3											

مصنع = p_i مخزن = w_i

تكملة شكل (6-4) الجزء الأيمن

أنشطة المبيعات

			بيع 3 عند مخزن 3	بيع 2 عند مخزن 3	بيع 1 عند مخزن 3	بيع 3 عند مخزن 2	بيع 2 عند مخزن 2	بيع 1 عند مخزن 2	بيع 3 عند مخزن 1	بيع 2 عند مخزن 1	بيع 1 عند مخزن 1
			25	30	35	25	30	35	25	30	35
قيود الإنتاج	200	≤									
	40	≤									
	360	≤									
	40	≤									
	0	≤									
صفوف العرض المتوازن	0	≤									
	0	≤									
صفوف الطلب المتوازن (الجهة النهائية)	0	≤	0	0	0	0	0	0	100	100	100
	0	≤	0	0	0	100	100	100	0	0	0
	0	≤	100	100	100	0	0	0	0	0	0
الحد الأقصى لقيود المبيعات	1000	≤	0	0	0	0	0	0	0	0	100
	500	≤	0	0	0	0	0	0	0	100	0
	1000	≤	0	0	0	0	0	100	0	0	0
	500	≤	0	0	0	0	100	0	0	0	0
	1000	≤	0	0	100	0	0	0	0	0	0
	1000	≤	0	100	0	0	0	0	0	0	0

الخلاصة

لقد ابتدأنا بمثال صغير بسيط يصف جانبا من المؤسسة ، بداية من مشكلة النقل ثم أضفنا الإنتاج ، وبعد اجراء الحل المشترك لمشكلة الإنتاج – النقل ، فقد أضفنا المبيعات كوجه آخر للمشكلة التى تواجهها المؤسسة . والآن نستطيع المواصلة بمزيد من المثابرة ، فقد نستطيع إضافة بدائل للعملية الإنتاجية فى مصنعينا . وقد نضيف شراء المواد الخام للمشكلة الإنتاجية ، وقد نجعل مشاكلنا دائمة الحركة وإضافة مراقبة المخزون عند مستوى المصانع والمخازن.

وبدلاً من التطوير والتنمية ، فنريد إلقاء بعض المحاذير من الكلمات ، فقد تكون البرمجة الخطية أداة قوية للإدارة ، ولكن يجب أن تستخدم بقليل من الحيطة. فنموذج مماثل لما عرضناه لمؤسستنا يستحق الثناء الكبير ، إذ يستطيع تزويدنا بالإطار الهيكلى الضرورى لتمثيل مكونات المؤسسة ووضعها فى الاعتبار . ويتطلب هذا النموذج التواجد المباشر لمسئولى الإنتاج للتوضيح والوصف لماهية التكاليف المترتبة على مواجهة طلبات غير عادية فرضت من أقسام التسويق أو الإنتاج بالمؤسسة .

وبنفس التناغم ، فاستكشاف الاختيارات فى النقل نادراً ما يجرى بطريقة مرحلية نظراً لضغوط الوظيفة من يوم لآخر. وأخيراً ، وبجلوس مسئولو التسويق و التصريح بما يجول فى خاطرهم من رغبات عملائهم وترجمة أحسا سيهم فى صورة أفعال تأخذها المؤسسة فى الاعتبار لهو تدعيم كبير للتخطيط العام الإدارى ، وتضمين كل هذه المعلومات فى برنامج خطى ليسمح بتقييم الموقف لما فيه صالح المؤسسة.

ومثل هذا النموذج لا يجب أن يستخدم لحل القرارات اليومية ، و إنما ينظر إليه كصورة عامة لمؤسسة فى مدى 2-5 سنوات . فهو وسيلة لتحديد اتجاه قرارات المؤسسة، منها على سبيل المثال هل سيجرى توسعة للمصنع رقم (1) ؟ هل سيزداد نشاط البيع بدرجة كبيرة فى المنطقة (2) ؟ ولماذا يظهر المصنع رقم (2) قصوراً دائماً بالنسبة للمصنع رقم (1) ؟ فهذه هى الأسئلة التى ستثيرها المؤسسة من جراء تحليلاتنا ، وما على المؤسسة إلا البدء فى وضع خطط طويلة المدى فى ضوء تلك الأفكار

طرق حسابية أخرى لمشكلة النقل

نظراً للطبيعة الخاصة لمشاكل النقل ، فلقد ظهرت لها طرق حسابية متخصصة تستخدم المصفوفة المكونة من أصفار وواحدات وأن القيود لتلك الطرق هى من المتساويات equalities. وتعُرض تلك الطرق فى مؤلفنا الآخر الذى يخاطب طلاب العلم فى مراحل نهائية من الدراسات الجامعية.

ورياضياً ، فينظر إلى مشكلة النقل إما أنها مشكلة متوازنة balanced أو غير متوازنة unbalanced. فتحت هذه الظروف التى يتساوى فيها العرض الكلى مع الطلب الكلى ، توصف المشكلة بأنها متوازنة ، فإذا زاد العرض عن الطلب أو العكس يقال للمشكلة أنها غير متوازنة . وقبل تقديمنا لطريقة الحل ب Simplex ، فقد اختلفت الأساليب الحسابية قليلاً للمشاكل المتوازنة وللغير متوازنة . وعلى كل ، فعموماً يمكن القول بأن حل مشكلة النقل يأخذ فى حسابه "حلا ممكنا"متبوعاً بأسلوب رياضى لتعظيم الحل الممكن . وبمعنى آخر ، فإنه من الضرورى أولاً التوصل لحل مبدئى ، ثم التقدم لتغيير الحل لكى ندنّى التكلفة .

ويتحصل على الحل الممكن بإحدى الطرق الآتية:

1- Northwest Corner Method

2- Vogel's Approximation

زد على ذلك ، فإنه يتحصل على الحل الامثل للحل الممكن بإحدى الطرق التالية :

1- Steppingstone Method

2- MODI Method

وهذا هو ما يتعرض له مرجع آخر للمؤلف.

ثانياً : الشحن متعدد العبور Transshipment

وهى من أحد أوجه مشاكل النقل، ومهمتـه أن يقرر الطريق الأمثل. وهناك فرض ضمنى فى مشكلة النقل مؤداه أن لكل زوج من (المصدر – محطة الوصول) يختار المسار الأقل تكلفة. وعلى كل ، فاختيار أحسن المسارات قد يكون مهمة صعبة فى حد ذاتها وهو ما تتناوله مشكله الشحن متعدد العبور ، حيث تتداخل فيها نقاط تقاطع للمسارات Junctions من خلالها يمكن أن تشحن البضائع . وهذه النقاط قد تنفرد عن المصادر ومحطات الوصول ، أو أن المصدر أو محطة الوصول قد يعمل كنقطة تقاطع . كما أن تكاليف شحن الوحدة معطاة بين كل المواقع المباشرة التى يمكن المرور من خلالها.

هذا وستُعالَج هذه المشكلة فى الوقت الحالى باستخدام طريقة البرمجة الخطية. ففى المثال التالى مطلوب نقل كمية من ثمار الفراولة من مدينة لوس انجلوس غرب الولايات المتحدة الأمريكية إلى

بوسطن فى الشمال الشرقى لأمريكا. وسيؤخذ فى الاعتبار عدد كبير من البدائل للطرق لتدنية تكاليف الشحن ، أو مسافة السفر ، أو الوقت لإتمام عملية الشحن . ولما كنا نتعامل مع انتاج سريع العطب perishable وذى قيمة عالية ، فسنختبر فقط تدنية المسافة والزمن.

ويلخص الجدول (4-10) المتواجد من اختيارات المسارات . ويبين العمود الأول بالجدول إمكانية الشحن من لوس انجلوس إلى مدينة بورتلاند ، سولت ليك ، دالاس. ومسافات الرحلة هى 970 ، 716 ، 1303 ميلا على التوالى، وكانت الأزمنة لتلك الرحلات هى 2.9 ، 2.4 ، 3.6 ساعة على التوالى ، كما يصف العمود الثانى الشحنات الممكنة من بورتلاند ، فيمكن الشحن إلى سولت ليك (802 ميل ، 2.6 ساعة) أو إلى شيكاغو (2112 ميل ، 5.2 ساعة) . وجميع هذه المعلومات معروضة بالشكل (4-7).وتتحدد مشكلتنا فى اختيار المسار من لوس أنجلوس إلى بوسطن الذى تتدنى معه مسافة الرحلة .

ويمكننا أن نتصور هذه المشكلة كبرنامج خطى . فكل شحنة ممكنة هى نشاط ، وفى كلمات أخرى ، فإن المعلومات فى الصف الأول من الجدول (4-11) تمكننا من توصيف أول ثلاث أنشطة من مشكلة البرمجة الخطية (بمعنى : اشحن من لوس انجلوس إلى بورتلاند ، اشحن من لوس انجلوس إلى سولت ليك ، إشحن من لوس أنجلوس إلى دالاس) . فيأخذ النشاط (L-P) وحدة واحدة من المعروض عند لوس انجلوس ويضيف وحدة إلى المعروض عند بورتلاند بتكلفة (970 ميل) . ويظهر العمود الثانى أن النشاط (L-S) يأخذ وحدة واحدة من المعروض عند لوس انجلوس ويضيف وحدة إلى المعروض عند سولت ليك بتكلفة (716 ميل). ويبين العمود الثالث أن النشاط (L-D) يأخذ وحدة واحدة من المعروض عند لوس انجلوس ويضيف وحدة واحدة إلى المعروض عند دالاس بتكلفة (1303ميل) . وبنفس الفكر يمكن قراءة باقى الأعمدة فى الجدول .

ولما كانت المهمة هى التعرف على اقصر مسافة مسار ، فلا يعنى شيئاً عما إذا شحنت وحدة واحدة أو 100 وحدة . فنتعرف على عرض مبدئى من وحدة واحدة عند لوس انجلوس حيث هى نقطة الشحن ، ولا توجد أى مواد متاحة عند النقاط الوسيطة ، كما أن العرض المبدئى عند النقاط من بورتلاند إلى واشنطن العاصمة يساوى صفراً.

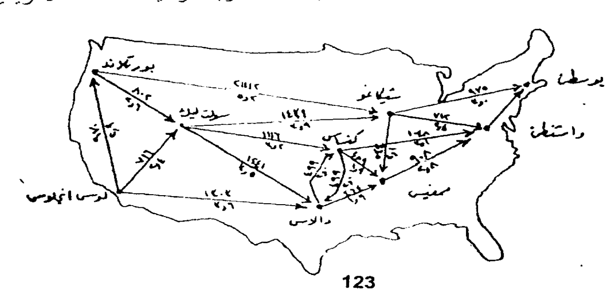
ولما كانت كل أنشطتنا هى تكاليف ، فلن يحدث شيء ما لم نفرض بعض المتطلبات (القيود). ويفرض الصف الأخير مثل هذا القيد ، إذ يقرر شحن على الأقل وحدة واحدة إلى بوسطن. وتنطبق فقط هذه القيود على الأنشطة (W-B) واشنطون إلى بوسطن ، (C-B) شيكاغو إلى بوسطن.

جدول (4-10) المسافات وزمن الشحن للمسارات البديلة بين المدن الأمريكية

الرمز	مدينة	لوس انجلوس	بورتلاند	سولت ليك	دالاس	كنساس	شيكاغو	ممفيس	واشنطون
		الصادر							
	جهة الوصول	أميال (ساعة)							
P	بورتلاند	970 (2.9)							
S	سولت ليك	716 (2.4)	802 (2.6)						
D	دالاس	1303 (3.6)		1241 (3.5)		499 (2.0)			
K	كنساس			1116 (3.2)	499 (2.0)				
C	شيكاغو		2112 (5.2)	1431 (3.9)					
M	ممفيس				464 (1.9)	459 (1.9)	544 (2.1)		
W	واشنطن					1048 (3.1)	712 (2.4)	908 (2.8)	
B	بوسطن						975 (3.0)	937 (1.9)	

شكل (4-7)

المسارات البديلة للشحن مبينة المسافات وزمن الرحلات الجوية،الولايات المتحدة الأمريكية



جدول (4-11) نموذج البرمجة الخطية لمشكلة تدنية تكلفة الشحن متعدد العبور Transshipment

S	$C_j \longrightarrow$	-970	-716	-1303	-802	-2112	-1241	-1116	-1413	-499	-464	-499	-499	-459	-1048	-544	-712	-925	-908	-437	
		L-P	L-S	L-D	P-S	P-C	S-D	S-K	S-C	D-K	D-M	K-D	K-C	K-M	K-W	C-M	C-W	C-B	M-W	W-B	
L	لوس انجلوس	1	1	1																	≤ 1
P	بورتلاند	-1			1	1															≤ 0
S	سولت ليك		-1		-1		1	1	1												≤ 0
D	دالاس			-1			-1			1	1	-1									≤ 0
K	كنساس							-1		-1		1	1	1	1						≤ 0
C	شيكاغو					-1			-1				-1			1	1	1			≤ 0
M	ممفيس										-1			-1		-1			1		≤ 0
W	واشنطون														-1		-1		-1	1	≤ 0
B	بوسطن																	1		1	≥ 1

وعلى كل فإذا دخل أحد هذين النشاطين الحل ، فسيدخل عند مستوى الصفر لأنه ليس لدى أى المطارين أى مواد للشحن . فدخول أى من النشاطين سيفرض طلباً جديداً الذى بالتالى سيحتاج شحنه. وسيستمر هذا البحث حتى تصل سلسلة من الشحنات من بوسطن (حيث يتواجد الطلب) راجعةً إلى لوس انجلوس (حيث يتواجد العرض الوحيد) . وبهذه الطريقة ، سيحدد البرنامج الخطى المسار بالحد الادنى من مسافة الرحلة .

والحل لهذه البرنامج الخطى هو شحن :

1- لوس انجلوس إلى دالاس

2- دالاس إلى ممفيس

3- ممفيس إلى واشنطون

4- واشنطون إلى بوسطن

وكانت مسافة الرحلة 3112 ميلاً ، والوقت المصاحب لتلك المسافة هو 10.2 ساعة . ولما كان هدف الدالة هو تدنية مسافة الرحلة ، فقد يكون هناك مسارات بديلة بوقت أقل .

لذلك نستطيع إعادة صياغة المشكلة لتكون تدنية زمن الشحن ، وذلك باستبدال الزمن مكان المسافة فى صف c_i . والحل للوضع الجديد هو شحن :

1- لوس أنجلوس إلى سولت ليك

2- سولت ليك إلى شيكاغو

3- شيكاغو إلى بوسطن

وكان الوقت للشحن هو 9.3 ساعة ، والمسافة للرحلة هى 3122 ميلاً. فقد اقتصد المسار الجديد حوالى ساعة واحدة على حساب مسار أطول نسبياً.وسيكون لمسئولى الإدارة الاختيار من بين هذه المسارات (أحدهما تدنية المسافة ، والأخر تدنية الزمن) .

وبالرغم من أن مهمة إعداد نموذج شحن قد يعتبر معضلة ، إلا أن الوفورات الكامنة فى تكاليف الشحن تكون ذات وزن . وهناك برامج تجارية لمقابلة هذه المشاكل ، أحدها صممته IBM ويسمى 360 – vsp ، وقد احتوى على المرونة الإضافية للسماح لبدائل أحجام عربات الشحن ، بما فى ذلك السير فى مسارات ذات اتجاه واحد ، والحدود القصوى لأوزان العربات على الطرق . وهذه النوعية من المعلومات يستفاد بها فى تطوير استخدامات برنامج الشحن المتعدد العبور .

*

ثالثاً: التكليف بالمهام

Assignment Problems

تعتبر طريقة التكليف بالمهام من نماذج البرمجة الخطية ذات الغرض الخاص وذات الفائدة في إرساء مهام معينة بأعلى درجة من الكفاءة للأفراد أو للمشروعات، قوة عمل البائعين ، العقود لأحسن المزايدين ، الأعمال للآلات ، اى التطابق الامثل بين الوظائف والموارد... الخ . والهدف في أغلب الأحوال هو تدنية التكلفة الكلية أو الوقت الكلى لأداء المهام الموكولة . وأهم خاصية هامة لمشاكل التكلفة بالمهام هى وظيفة واحدة أو عامل واحد لآلة واحدة أو مشروع واحد.

وتُعرض المشكلة التقليدية للتكلفة بالمهام ، مصورة فى الجدول التالى ، حيث هناك 4 وظائف لأربع آلات ، ويجرى ترتيب المشكلة بطريقة تسهّل تقييم المهام. وتمثل الأرقام فى الجدول ، القيمة أو التكلفة المصاحبة لكل وظيفة – آلة ، وفى حالتنا فالأرقام تمثل تكاليف : فعلى سبيل المثال ، فالتكلفة 8 جنيهات لعمل الوظيفة (1) على الآلة A . فإذا كانت المشكلة تتضمن تدنية التكلفة للوظيفة (1) فقط ، فالمشاهد أنه سيعهد بها إلى الآلة C حيث التوليفة (1-C) لها أقل تكلفة ، ولكن هذه المهمة لا تأخذ فى اعتبارها الوظائف الأخرى وتكلفتها . فمشكلة التكليف بالمهام تزودنا بطريقة للتعرف على حل ينتج عنه أقل تكلفة كلية، ويفترض أيضاً أن كل آلة لديها المقدرة على تناول كل وظيفة ، وأن التكلفة أو القيم المصاحبة لكل مهمة مشتركة تكون معروفة وذات قيمة ثابتة (لا تتغير) .

وعند عرض المشكلة فى الشكل الجدولى الخاص بها تجرى الخطوات الأساسية وهى:

1- اطرح أصغر رقم فى كل صف من كل رقم فى الصف ، وأدخل النتيجة فى جدول جديد.

2- اطرح أصغر رقم فى كل عمود فى الجدول الجديد من كل رقم فى العمود، وأدخل النتيجة فى جدول آخر .

3- أجر الاختبار للتعرف على الوصول إلى المهمة المثلى من عدمه ، وذلك بتحديد أدنى عدد من الخطوط التى يحتاج إليها لتغطية كل الاصفار . فإذا تساوى عدد الخطوط مع عدد الصفوف ، فهناك إمكانية الوصول إلى المهمة المثلى وفى هذه الحالة نذهب إلى الخطوة السادسة ، وإلا فنذهب إلى الخطوة الرابعة.

4- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف فيعدّل الجدول طبقا للتالي :

أ – اطرح أصغر رقم غير مغطى من كل رقم غير مغطى فى الجدول .

ب – أضف أصغر رقم غير مغطى إلى الأرقام الموجودة فى تقاطعات الخطوط المغطاة .

5- أعد الخطوات 3 ، 4 حتى تتحصل على الجدول الامثل.

6- أجر توزيع المهام ، وابدأ بالصفوف أو الأعمدة التى بها صفر واحد. وفّق بين الأشياء التى لها قيمة صفرية ، مستخدماً فقط توفيق واحد لكل صف وكل عمود.

مثال 1:

قدر المهام المثلى للوظائف المناسبه للالات للبيانات التالية :

المهمة		الآلـــة A	B	C	D
	1	8	6	2	4
	2	6	7	11	10
	3	3	5	7	6
	4	5	10	12	9

الحل :

أ – اطرح أصغر رقم فى كل صف من كل رقم فى الصف ، وأدخل النتائج فى جدول جديد،ونتيجة هذه الصفوف المختزلة هى :

المهمة		الآلـــة A	B	C	D
	1	6	4	0	2
	2	0	1	5	4
	3	0	2	4	3
	4	0	5	7	4

ب – اطرح أصغر رقم فى كل عمود من كل رقم فى العمود ، وأدخل النتائج فى جدول جديد ، ونتيجة هذه الأعمدة المختزلة هى :

المهمة		الآلـــة A	B	C	D
	1	6	3	0	0
	2	0	0	5	2
	3	0	1	4	1
	4	0	4	7	2

جـ - قدّر أقل رقم من الخطوط التى نحتاجها لتغطية كل الاصفار .(حاول تغطية أكثر ما يمكن من الصفوف عند رسمها .)

الآلـــة

المهمة		A	B	C	D
	1	6	3	0	0
المهمة	2	0	0	5	2
	3	0	1	4	1
	4	0	4	7	2

د- ولما كان عدد الخطوط المطلوبة أربعة (هناك أربعة صفوف) فليس هذا هو الوضع الامثل .

هـ - اطرح أصغر قيمة غير مغطاة (فى حالتنا ، 1) من كل رقم غير مغطى ، وأضفها إلى كل الأرقام التى عند تقاطع الخطوط المغطاة. والناتج كما يلى :

الآلـــة

المهمة		A	B	C	D
	1	7	3	0	0
المهمة	2	1	0	5	2
	3	0	0	3	0
	4	0	3	6	1

و- قدّر أقل عدد من الخطوط التى نحتاجها لتغطية كل الاصفار (أربعة).ولما كان هذا العدد يساوى عدد الصفوف ، فقد توصلنا إلى الحل الامثل .

الآلـــة

المهمة		A	B	C	D
	1	7	3	0	0
المهمة	2	1	0	5	2
	3	0	0	3	0
	4	0	3	6	1

س – قرر توزيع المهام ابدأ بالصفوف والأعمدة التى فيها صفراً واحداً .

ش – وفق كل مهمة مع الآلة حيثما التوليفة لها قيمة صفرية .

الآلـــــة

المهمـــة		A	B	C	D
	1	7	3	[0]	0
	2	1	[0]	5	2
	3	0	0	3	[0]
	4	[0]	3	6	1

وامتداداً لهذه الطريقة التى يجدر التعرف عليها هو قدرتها على منع المهام غير المرغوبة . فمثلا قواعد النقابة قد تمنع أداء مهمة معينة لوظيفة خاصة . ومهما كان السبب ، فيستطاع تفادى عمل توفيقات خاصة بتعيين قيمة عالية نسبياً لها . فعلى سبيل المثال فى مثلنا السابق ، إذا رغب فى تفادى توفيـق (1-A) فيعطى له قيمة 50 جنيهاً لإعطاء الأثر المطلوب لأن تلك القيمة أكبر بكثير من التكاليف الاخرى . وفى الاحوال التى يراد فيها **الأرباح بدل التكاليف** ، فتحور المعلومات إلى تكلفة نسبية بطرح كل رقم فى الجدول من **أكبر الأرقام** ثم استكمال الحل.

*

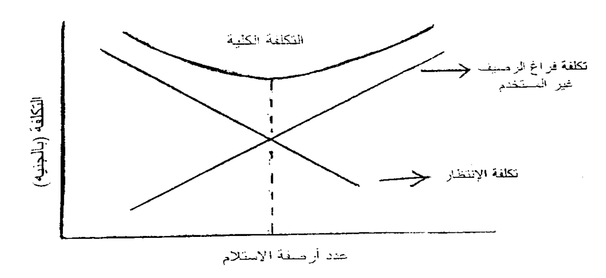
رابعاً : صفوف الانتظار

Waiting Lines

حتى الآن فقد حددنا أين نشحن ، كم نشحن . ونعتبر الآن ما هى الترتيبات الممكن عملها لاستخدام الممكن عملـه لاستلام الشحنة . وكمثل لذلك ، قررنا إرسال عدد ما (X) من حمولة عربات من المصنع (Y) إلى جهة الوصول (Z) ، والآن نريد أن نأخذ فى الاعتبار ما هى منشآت الاستلام فى جهة الوصول . قد يكون لدينا رصيف واحد للتفريغ unloading platform (K= 1) حتى يمكن لعربة واحدة فقط التفريغ فى وقت واحد ، أو قد يكون لدينا عدة أرصفة تفريغ (K > 1) . قد يكون لدينا قليل أو كثير متاح من العمال لتفريغ هذه العربات ، وسيكون لذلك تأثير على وقت التفريغ (u) الذى تتواجد فيه كل شاحنة على الرصيف . وفى دراسة هذا الوضع الخاص ، فقد يوصى بزيادة أو نقص مساحة الرصيف أو زيادة أو تخفيض قوة فريق عمل التفريغ ، أو تغيير المنشآت أو طريقة تناول عمليات التفريغ . ويمكن فقط حل مشاكل صفوف الانتظار إذا كان عدد الوحدات التى سيجرى تفريغها فى فترة زمنية محددة أكبر من عدد مرات الوصول .

وهدفنا هو تدنية التكاليف عن طريق تواجد عدد مناسب من منشآت الاستلام وحجم كاف من عمال التفريغ لضمان أقصى كفاءة بأقل تكلفة . ونعرض مشكلتنا بيانياً فى الشكل (8-4) ، فكلما تزايد عدد أرصفة الاستلام ، تزايدت تكلفة الفراغ للأرصفة غير المستخدمة لزيادة النفقات المتزايدة لصيانة الأرصفة غير المستخدمة .وعلى الجانب الآخر ، تنتظر كل عربة شحن وقتاً أقصر فأقصر حتى تتناقص تكلفة الانتظار باستمرار . ويشاهد من الشكل (8-4) أن أدنى تكلفة كلية هى محصلة هاتين التكلفتين . وستعرض فيما يلى ثلاثة نماذج تتدرج فى تعقيداتها بخصوص صفوف الانتظار .

شكل رقم (8-4) المفاضلة بين تكلفة الانتظار وتكلفة المنشآت الخدمية الغير مستخدمة



مثال (1) تحديد حجم فريق عمال التفريغ ، حجم اللوط ثابت

Determining size of Unloding Crew , Lot Size Constant

يتسلم مصنع لتعبئة الطماطم عربات محملة من الطماطم خلال العشر ساعات العمل اليومية .وبالرغم من محاولة جدولة وصول هذه الأحمال بعدد واحدة فى الساعة ، فإنها كانت فى الواقع تصل بطريقة عشوائية (ومن المتصور حسب توزيع بواسون) ، بمتوسط حمولة عربة فى الساعة . وكانت تكلفة عمالة التفريغ لكل رجل \ يوم 15 جنيهاً ، وساعة الوقت غير الفعال idle لكل عربة \ ساعة هى 6 جنيهات . وتتكون العملية الحالية لفريق العمل من عاملين اللذين يقومان بتفريغ حمولة السيارة فى 45 دقيقة بالضبط . ويظن المسئول عن التعبئة فى المصنع أنه إذا أضاف رجالاً أكثر إلى فريق عمل التفريغ ، فإنه قد يغطى تكلفة العمالة المضافة بالتوفير فى وقت انتظار العربة المشحونة truck load ،ويرى أن ثلاثة رجال سيقومون بتفريغ العربة فى 30 دقيقة بالضبط وأربعة رجال سيؤدون المهمة فى 20 دقيقة .

وفى هذا الموقف حيث وقت التفريغ (u) ثابت ، فقد نجد أن متوسط فترة الانتظار أو الوقت غير الفعال (E_w) يتأتى بالمعادلة :

متوسط وقت انتظار العربة فى الصف

$$E_W = \frac{a}{2u(u-a)}$$

حيث :

$$a \text{ (عدد مرات الوصول \ ساعة) } = 1$$

$$u \text{ (التفريغ \ ساعة) } = 60/45 = 1.3$$

وعندئذ:

عدد ساعات انتظار \ عربة

$$E_W = \frac{a}{2u(u-a)} = \frac{1}{2.67(0.33)} = 0.88$$

أى أن وقت الانتظار الكلى للعشر عربات فى اليوم هو 8.8 ساعة ، وبتكلفة قدرها 6 جنيهات فى الساعة ، فتكون التكلفة فى اليوم هى 52.80 جنيهاً.

فإذا أراد المصنع إضافة رجل ثالث لعمال التفريغ ، فسيقلل وقت التفريغ من 45 دقيقة للعربة إلى 30 دقيقة ليكون وقت التفريغ \ ساعة (U) مساوياً 60 ÷ 30 = 2 ومتوسط وقت الانتظار لكل عربة سينخفض كالتالى :

عدد ساعات انتظار \ عربة

$$E_W = \frac{a}{2U(u-a)} = \frac{1}{4(2-1)} = 0.25$$

مضروبة فى 10 عربات = 2.5 ساعة انتظار فى اليوم ، وبتكلفة 6 جنيهات \ ساعة = 15.00 جنيها . فبزيادة عدد عمال التفريغ من 2 إلى 3 انخفضت تكلفة الوقت غير المستخدم (وقت الانتظار) من 52.80

جنيهاً إلى 15.00 جنيهاً أو بمقدار 37.50 جنيهاً عند تكلفة قدرها 15 جنيهاً للعمالة الإضافية ، محققةً وفراً قدره 22.80 جنيه

وإضافة عامل رابع إلى فريق العمل سيقلل وقت التفريغ إلى 20 دقيقة لكى تكون $u = 60 \div 20 = 3$ ، بذلك فإن :

$$E_W = \frac{1}{2u(u-a)} = \frac{1}{6(3-1)} = \frac{1}{12} \text{ ساعة} = 5 \text{ دقائق}$$

وبالضرب فى 10 عربات فى اليوم يكون إجمالى وقت الانتظار فى اليوم(10 \ 12) ساعة ، وبتكلفة 6 جنيهات \ ساعة = 5.00 جنيهات. وبالمقارنة بفريق العمل المكون من 3 أفراد ، فهذا يمثل توفيراً إضافياً قدره 10 جنيهات \ يوم ممثلاً فى تخفيض الوقت غير المستخدم ، ولكن لما كانت تكلفة العامل الرابع هى 15 جنيهاً وأكبر من الوفورات وقدرها 10 جنيهات فإن هذا لا يبرر إضافة العامل الرابع لفريق التفريغ.

ويمكن إذا رغبنا ،الحصول على معلومات إضافية بخصوص صفات صفوف الانتظار ، حيثما وقت التفريغ يكون ثابتاً، بإستخدام المعادلة التالية ، ومثلنا هو فريق عمال التفريغ المكوّن من ثلاثة مع وقت التفريغ (u) من 30 دقيقة ، أو إثنين فى الساعة .

متوسط عدد العربات المنتظرة فى الصف ، ويحسب كالآتى :

$$E_m = \frac{a^2}{2u(u-a)} = \frac{1^2}{4(2-1)} = \frac{1}{4} \text{ عربة شحن}$$

متوسط عدد العربات فى الساحة :

$$E_n = E_m + \frac{a}{u} = \frac{1}{4(2-1)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ عربة الشحن}$$

متوسط وقت انتظار العربة فى الساحة :

$$E_v = \frac{a}{2u(u-a)} + \frac{1}{u} = \frac{1}{4(2-1)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ ساعة}$$

مثال (2) تحديد حجم فريق التفريغ مع تفاوت حجوم اللوطات

Determining size of Unloading Crew , Lots Varying in size

وهنا قد يتفاوت جذرياً حجم عربة الشحن وشكلها ، لكى لا يصبح وقت التفريغ بفريق عمل محدد الحجم – ثابتاً ، ولكن قد يتباين أسّياً exponentially ، وحينئذ ستختلف معادلاتنا بعض الشيء كالآتى :

متوسط وقت انتظار العربة فى الصف $E_w = \frac{a}{u(u-a)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$ ساعة

متوسط عدد العربات المنتظرة (فى الصف):

$$E_m = \frac{a^2}{u(u-a)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$$ عربة شحن

متوسط عدد العربات فى الساحة :

$$E_n = \frac{a}{u-a} = \frac{1}{2-1} = 1$$ عربة شحن

متوسط وقت وجود العربة (الوحدة) فى الساحة (وقت الانتظار + وقت الخدمة):

$$E_v = \frac{1}{u-a} = \frac{1}{1} = 1$$ ساعة

ولتقدير العدد المثالى لحجم فريق عمال التفريغ ، فيجرى العمل كما فى مثال (1) ، ولكن مستخدمين معادلات مختلفة بعض الشيء مثل E_w المشار إليها بعاليه .

وفى أى حجم من المصانع ، فإن رصيف محطة تفريغ منفردة قد تصبح سريعاً عنق الزجاجة ، مما يتطلب معه الأمر إجراء ترتيبات لعديد من المحطات،وفى هذه الحالة ، وبالإضافة إلى اعتبارات أخرى ، فمسئول المصنع سيعرف عما إذا كان لديه العدد الكافى أو الزائد من عمال التفريغ لتصبح معه العملية أكثر كفاءة.

مثال (3) تحديد عدد محطات التفريغ

Determining Number of Unloading Stations

مصنع لتعبئة الطماطم وعربات مشحونة تصل إلى أرصفته بمتوسط معدل 10 فى الساعة (a=10) وتكلفة وقت العربة غير المستخدم (وقت الانتظار) هو 6 جنيهات فى الساعة. ولدى المصنع ثلاث محطات للتفريغ (K =3) ، ويستطيع فريق عمال التفريغ فى كل محطة تفريغ 4 حمولة عربات فى الساعة : (u = 4) . وكانت التكلفة الكلية لصيانة وإدارة عمليات محطة التشغيل ، بما فيها كل تكاليف العمالة هو 10 جنيهات فى الساعة . ويستطيع المصنع ، تقليل عدد محطات التفريغ ، كما يستطيع إيجاد فضاء للأرصفة لزيادة عدد محطات التفريغ إلى 4 أو حتى 5 . ويريد المصنع التعرف عما إذا كان استخدام الثلاث محطات هو الأكثر اقتصاداً ، أو قد يزيد العدد إلى أربعة ، أو من المحتمل تقليل العدد إلى 2. وهناك أيضاً الأخذ فى الاعتبار إمكانية تغيير التشهيلات فى محطات التفريغ من تناول الصناديق فردياً على سيور النقل إلى تناولها على قواعد المنصات الخشبية (البالتات) Palletized Crates .

سنعتبر أولاً النظام الحالى ، ونقدر متوسط وقت الانتظار للعربة المشحونة (E_W)، وبوجود أكثر من محطة تفريغ($K \geq 1$) فستصبح معادلتنا أكثر تعقيداً :

متوسط فترة الانتظار لكل عربة :

$$E_w = \frac{u(a/u)^k}{(k-1)!(ku-a)^2} \; (p_o)$$

حيث :

u = عدد التفريعات فى الساعة عند كل رصيف = 4 عربة شحن

a = عدد عربات الوصول فى الساعة = 10 عربة شحن

k = عدد محطات التفريغ = 3 محطات

P_o = احتمال عدم وصول عربات (أو وحدات فى المنظومة)

ونحتاج أولا إلى تقدير P_o ، وتقدر بإستخدام المعادلة التالية :

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=o}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{u}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{a}{u}\right)^k \frac{ku}{ku-a}} \qquad \text{for } Ku > a$$

والجزء ما بين القوس الكبير فى المقام يعنى مجموع القيم $(1/n!)(a/u)^n$ ، مبتدئين $(n = 0)$ مضافاً إليها نفس العبارة عندما $(n = 1)$ وهلم جرا حتى $(n = k - 1)$. ولما كان فى مثالنا $(k = 3)$ فمجموع العبارة $(1/n!)(a/u)$ عندما $(n = 0)$, $(n = 1)$, $(n = 2)$ هو كما يلى :

When $n = 0$, $\frac{1}{0!}\left(\frac{a}{u}\right)^0 = 1$ (since 0 ! = 1) حيث مضروب صفر = 1

When $n = 1$, $\frac{1}{1!}\left(\frac{10}{4}\right)^1 = 2.5$

When $n = 2$, $\frac{1}{2(1)}\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 3.125$ (since 2 ! = 2 x 1)

Since k = 3 , then :

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{3\times2\times1} = \frac{1}{6}$$

$$(a/u)^k = (10/4)^3 = 15.625$$

$$\frac{ku}{ku-a} = \frac{3(4)}{3(4)-10} = \frac{12}{2} = 6$$

وبالتعويض فى المعادلة بعاليه فيكون :

$$P_o = \frac{1}{1+2.5+3.125+\frac{1}{6}(15.625)(6)} = \frac{1}{22.35}$$

وبذلك نستطيع الآن حل متوسط فترة الانتظار لكل عربة للتفريغ كالتالى :

$$E_w = \frac{4(10/4)^3}{(3-1)![3(4)-10]^2}\left(\frac{1}{22.35}\right) = \frac{62.5}{8}\left(\frac{1}{22.35}\right) = 0.35 \text{ ساعة}$$

وبهذا يكون معدل الانتفاع $83\% = \frac{10}{3\times4} = \frac{a}{ku} = utilization$

ومن هذا الوضع لتسهيلات التفريغ ، ومتوسط 10 عربات وصول فى الساعة ، فإن فترة الانتظار للتفريغ هى 0.35 ساعة مضروبة فى 10 ، أى 3.5 ساعة ، وبتكلفة انتظار قدرها 6 جنيهات فى الساعة لكل عربة ، فتصبح التكلفة الكلية 21 جنيهاً فى الساعة . ومما سبق معرفته عن أن تكلفة صيانة وإدارة محطة التفريغ هى 10 جنيهات فى الساعة ، لذلك فمن المنطقى الأخذ فى الاعتبار التوصية بإضافة محطة تفريغ رابعة.

ونعود ثانياً لإيجاد حل لـ p_o ، فالتفريغ لكل ساعة لكل محطة يبقى كما هو عند $(u = 4)$ ويبقى عدد عربات الوصول فى الساعة كما هو عند قيمة $(a = 10)$ ، ولكن عدد محطات التفريغ تغير من $(K = 3)$ إلى $(k = 4)$.

$$P_o = \frac{1}{1+2.5+3.125+7.812+1/24(10/4)^4[16/(16-10)]} = \frac{1}{18.776}$$

and

$$E_w = \frac{4(10/4)^4}{(4-1)![4(4)-10]^2}\frac{1}{18.776} = \frac{156.25}{4056.48} = 0.038 \text{ ساعة}$$

وعلى ذلك ففترة انتظار العربات للتفريغ قد تنخفض لمتوسط قدره 0.038 ساعة \ عربة ، أو 0.38 ساعة لعدد عربات الوصول فى الساعة وقدرها (10) .وعند تكلفة انتظار قدرها 6 جنيهات لكل عربة ، فتصبح معها التكلفة 2.28 جنيها أى (6×0.38) فى الساعة ، مقارنة ب 21 جنيها فى الساعة عند اتاحة ثلاث أرصفة تفريغ فقط ، أو بتخفيض فى التكلفة قدره 21 – 2.28 = 18.72 جنيها . وبطرح 10 جنيهات تكلفة صيانة وإدارة محطة التفريغ الرابعة فيكون عندنا وفرا صافيا قدره 8.72 جنيها فى الساعة بتشغيل المحطة الرابعة.

ولما كان إقامة وتشغيل محطة تفريغ خامسة سيضيف 10 جنيهات إلى التكلفة ، وأن أقصى تخفيض فى التكلفة بتقليل فترة انتظار السيارة هو الآن 2.28 جنيهاً فقط ، فمن الواضح أن صافى التكاليف لا يمكن إجراء مزيد من التخفيضات فيه إذا أضيفت محطة التفريغ الخامسة . فإجابتنا إلى هذه المشكلة هى أن أكثر الوسائل الاقتصادية لتفريغ هذه العرْبات هى باستخدام أربع محطات حيث يكون متوسط فترة الانتظار للعربة هو 0.038 ساعة أو أزيد قليلاً عن دقيقتين .

ويمكننا تقدير متوسط عدد العربات المنتظرة بالمعادلة التالية (لمثال مشكلة 4 محطات)

$$E_m = \frac{au(a/u)k}{(k-1)!(ku-a)^2}\, p_0 = \frac{40(10/4)^4}{3!(16-10)^2}\,\frac{1}{18.776} = 0.385 \quad \text{عربة منتظرة}$$

متوسط عدد العربات فى الساحة :

$$E_n = \frac{au(a/u)k}{(k-1)!(ku-a)^2}(p_0) + \frac{a}{u} = \frac{40(10/4)^4}{3!(16-10)^2}\,\frac{1}{18.776} + \frac{10}{4}$$

$$= 0.385 + 2.5 = 2.885 \quad \text{عربة}$$

ومتوسط وقت وجود العربة فى الساحة :

$$E_v = \frac{u(a/u)k}{(k-1)!(ku-a)^2}(p_0) + \frac{1}{u} = \frac{4(10/4)^4}{3!(16-10)^2}\,\frac{1}{18.776} + \frac{1}{4}$$

$$= 0.288 \quad \text{ساعة}$$

فإذا أدخل فى الاعتبار استخدام المنصات الخشبية (البالتات) فستجمع البيانات لتقدير القيم الجديدة لعدد العربات التى ستفرغ لكل ساعة لكل محطة (u) ، وتكلفة إنشاء وصيانة وإدارة عملية المحطات الجديدة ، ويبقى كما هو عدد عربات الوصول فى الساعة (a). وبهذه البيانات ، واستخدام الخطوات السابق وصفها ، تجرى الحسابات لتقدير العدد الأمثل من المحطات التى ستتعامل مع المنصات الخشبية ، وأى من التغييرات ستجرى للتحول من التعامل مع الصناديق فردياً إلى التعامل مع المنصات الخشبية.

***

الباب الخامس

أ- نـمـاذج شبكـة العمـل

Network Models

تمهيـــــد:

يعتبر PERT (Program Evaluation and Review Technique) و CPM (Critical Path Method) من الأساليب التحليلية الكمية التى تساعد المديرين فى تخطيط وجدولة ومتابعة ومراقبة تنفيذ المشروعات الكبيرة والمعقدة. وظهرت هذه الأساليب تلبية للحاجة الملحة لايجاد وسيلة أحسن لمعالجة هذه المواقف.

اطار عمل PERT و CPM:

هناك ستة خطوات عامة لكل من الأسلوبين يجرى اتباعها ..

1- تحديد اطار المشروع وكل الأنشطة الجوهرية أو المهام.
2- تشكيل العلاقات بين الأنشطة. تقرير أى الأنشطة التى يجب أن تنفذ أولا، وأيهما يتبع الآخرين.
3- ترسم شبكة العمل التى تصل بين هذه الأنشطة.
4- يُقدر الوقت أو التكلفة التقديرية أو الاثنين معا لكل نشاط.
5- يُحسب أطول مسار زمنى خلال شبكة العمل، وهذا يسمى المسار الحرج Ciritical Path.
6- ثم تستخدم الشبكة فى المساعدة فى تخطيط وجدولة ومراقبة ومتابعة أعمال المشروع.

هذا والبحث عن المسار الحرج يمثل جزءا رئيسيا من مراقبة أى مشروع. وبالتعرف على أنشطة غير حرجة، واعادة التخطيط واعادة الجدولة واعادة توزيع الموارد كالقوى العاملة والتمويل - فانه يعطى المديرين درجة عالية من المرونة فى أدائهم. فلكل نشاط فى PERT هناك ثلاث تقديرات للزمن تندمج مع بعضها لتحديد النشاط المتوقع تنفيذه خلال تلك الفترة الزمنية مع تباينها Variance. و PERT هو أسلوب احتمال يسمح لنا بايجاد درجة احتمال Probability انتهاء تنفيذ المشروع فى وقت معين. اما CPM فهو أسلوب محدد deterministic يستخدم تقديرين للوقت، الوقت العادى Normal time ووقت الذروة Crash time لكل نشاط. فالوقت العادى لانتهاء تنفيذ المشروع هو الوقت المقدر للتنفيذ تحت الظروف العادية، أما وقت الذروة فهو أقصر وقت يؤخذ للانتهاء من أى نشاط اذا توافرت له أرصدة مالية وموارد اضافية.

وفى عرضنا هنا سنتحرى ليس فقط PERT و CPM بل أيضا أسلوب يسمى PERT/Cost والذى يجمع ما بين PERT و CPM.

أساليب أخرى لشبكة العمل

و بالاضافة إلى ماسبق، يوجد التالى من الشبكات:

1- The Minimal - Spanning Tree Technique (شجرة الامتداد الادنى) ويحدد المسار خلال الشبكة - الذى يربط بين كل النقاط وفى ذات الوقت يدنى المسافة الكلية. ومن الأمثلة التطبيقية لذلك، هو عندما تمثل هذه النقاط مساكن مشروع اسكانى. وهذا الاسلوب يحدد أحسن مسار لربط هذه المساكن بالقوى الكهربائية، ومياه الشرب، ....الخ، بطريقة تدنى المسافة الكلية، أو طول خطوط القوى أو مواسير المياه.

2- The Maximal - Flow Technique (التدفق الأقصى). ويبحث عن أقصى تدفق لأى كمية أو كتلة مادية خلال شبكة العمل. فيحدد على سبيل المثال، الحد الاقصى من العربات (سيارات، نقل، ...الخ) التى يمكن مرورها من خلال شبكة الطرق من موقع إلى آخر.

3- The shortesr - Route Technique (أقصر الطرق) وهو يبحث عن أقصر مسار خلال شبكة العمل، ومن أمثلته أقصر طريق من مدينة لأخرى من خلال شبكة الطرق.

وفى العديد من الحالات، فالمشاكل من الشبكات الصغيرة يمكن حلها بالتنسيق والحس الذاتى. أما المشاكل الاكبر فتحتاج إلى أجهزة الحاسب الآلى، وفى هذا المقام سيعرض المدخل التنظيمى لذلك.

:PERT

أن أى مشروع كبير يمكن أن يقسم إلى مسلسل من الأنشطة الصغيرة أو المهام التى يمكن تحليلها بواسطة PERT. وحينما نتعرف على ذلك، فسيكون لدينا القدرة على الاجابة على كثير من الأسئلة مثل:

1- متى سيكتمل المشروع كلية؟
2- ماهى الأنشطة أو المهام الحرجة فى المشروع. أى التى ستؤخر المشروع كلية إذا تأخر تنفيذها؟
3- ماهى الانشطة غير الحرجة، أى التى قد يتأخر اكتمالها بدون تأخير اكتمال المشروع ككل؟
4- ماهو احتمال أن المشروع سيكتمل عند تاريخ معين؟
5- عند أى تاريخ معين، سيكون المشروع حسب الجدول متخلفا أو سابقا للجدولة؟
6- عند أى تاريخ معطى، سيكون المال المنفق مساو لـ ، أقل من، أو أكبر مما هو مشار اليه فى الميزانية؟
7- هل هناك موارد كافية متاحة لانتهاء المشروع فى الوقت المحدد؟
8- إذا شاء للمشروع اكتماله فى وقت أقصر. ماهى أحسن طريقة ليكون مصاحبا ذلك أقل تكلفة له؟

PERT (أو PERT/Cost) قد يساعدنا فى الاجابة على هذه الأسئلة

مثال: شركة مينا للأسمنت

للشركة وحدة انتاجية فى حلوان. وقد كانت لمدة طويلة تحاول تجنب الاتفاق لتركيب أجهزة للتحكم فى تلوث الهواء. وقد أخطرتها حديثاً السلطات البيئية فى المنطقة بضرورة قيامها بتركيب أجهزة تنقية الهواء على مداخنها الرئيسية فى غضون 16 أسبوعاً، والا ستضطر الشركة إلى اغلاق أبوابها. ويريد العضو المنتدب للشركة التأكد من سرعة تركيب أنظمة تنقية الهواء – بيسر وفى الوقت المناسب.

أنشطة المشروع

عندما يبدأ المشروع فيمكن أن تبنى المكونات الداخلية للجهاز (نشاط A)، والتعديلات الضرورية للأرضية والسطح (نشاط B). ويمكن البدء مباشرة بعد اكتمال السابق فى تشييد وحدة التجميع (نشاط C). واكتمال صب أرضية خرسانية جديدة واقامة الاطار (نشاط D) بمجرد الانتهاء من تعديل السطح والأرضية. وبانتهاء تشييد وحدة التجميع يمكن بناء المحرقة ذات درجة الحرارة العالية (نشاط E). كما يمكن البدء فى تركيب اجهزة التحكم فى تلوث الهواء (نشاط F). أما ضابط تلوث الهواء (نشاط G) فيمكن تركيبه بعد بناء المحرقة، والارضية الخرسانية قد صبت، والاطار قد أقيم. وأخيراً بعد اقامة اجهزة التحكم وضابط التلوث فيمكن التفتيش واختبار المنظومة (نشاط H).

وتعطى هذه الانشطة انطباعاً بالحيرة والتعقيد حتى يجرى وضعها فى شبكة عمل، فأولاً يجب تدوين كل هذه الأنشطة. وترى هذه المعلومات فى الجدول التالى:

جدول (5 - 1)

الأنشطة وسابقتها المباشرة لشركة مينا للأسمنت

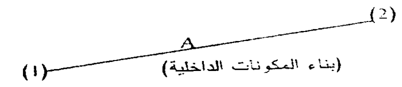
الأنشطة	الوصف	النشاط السابق مباشرة
A	بناء المكونات الداخلية للجهاز	
B	تعديل السقف والأرضية	
C	تشييد وحدة التجميع	A
D	صب الخرسانة واقامة الاطار	B
E	بناء المحرقة	C
F	تركيب أجهزة التحكم	C
G	تركيب ضابط تلوث الهواء	D,E
H	التفتيش والاختبار	F,G

ويرى من الجدول أنه قبل تشـييد وحـدة التجميـع (C) فيجب بنـاء المكونـات الداخليـة للجهـاز. أى أن النشاط (A) هو النشاط السابق مباشرة للنشاط (C). وبالمثل النشاطين (D) ، (E) ينفذان قبـل النشـاط (G).

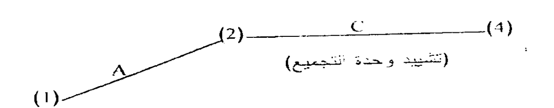
رسم شبكة عمل PERT

بمجرد الانتهاء من الخطوتين الأولتين من اطـار العمـل السـابق ذكرهمـا، فيجـرى رسـم شـبكة العمـل (وهى الخطوة الثالثة التى ستتبع).

كل نشاط يرمز له بسهم: ———► . وهو يمثل المهمة أو الجزء من المشروع الذى يسـتخدم الوقـت أو الموارد. أما القطعة الاخرى التى نحتاجها لخلق الشبكة فتسمى حدثا event. والحدث هو علامة لبداية أو اكتمال ذلك النشاط، ويشار اليه بالقوس ( ) و الذى يحتوى علـى رقـم يساعدنا فـى تحديـد مكانـه. فمثلا النشاط (A) يمكن تمثيله كالاتى:

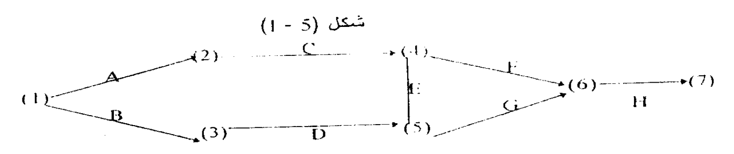


فهو يبدأ بالحدث (1) وينتهى بالحدث (2). و النشاط السابق مباشرة للنشاط (C) هو النشـاط (A).



والآن نقوم برسم جميع نشاط شبكة العمل لشركة مينا للاسمنت، كما يبينها الشكل (5 - 1)

شكل (5 - 1)



ويجـب أن نعلم أن رسم شبكة عمـل PERT تـأخذ بعض الوقت والخبرة. إذ تبدأ بـالعقدة الأولـى NODE(1). حينئذ نرسم الانشطة منها والتى ليس لها نشـاط سـابق مباشـرة، وفى حالتنـا (A)، (B).

ونظرا لصعوبة رسم الشبكة كخط مستقيم، فإنه يجرى رسمها تقريبيا مع التأكد من أن كل العلاقات فى محلها، ثم يمكنك اعادة رسمها لجعل كل خطوط الأنشطة مستقيمة.

أوقات الانشطة Activity Times

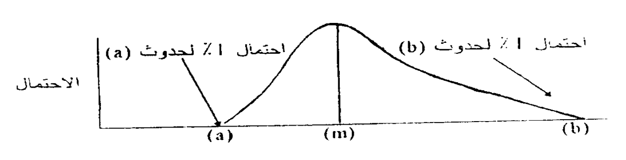
الخطوة التالية من خطوات PERT هى توقيع التقديرات الزمنية والتى يحتاجها كل نشاط لاستكماله وعادة ما تعطى الأوقات فى وحدات أسبوعية. وليس من السهولة بمكان التعرف على هذه التقديرات. فبدون المعلومات التاريخية يصعب على المديرين التأكد من هذه التقديرات. ولهذا السبب، فإن مصممى PERT استخدموا التوزيع الاحتمالى المبنى على تقدير ثلاثة أوقات لكل نشاط. وهذه التقديرات هى:

- الوقت التفاؤلى (a) = الوقت الذى سيحتاجه النشاط إذا سارت الأمور على مايرام. وسيكون هناك احتمال صغير (وليكن 1 \ 100) لهذا الحدث.
- الوقت الأكثر احتمالا (m) = تقدير للوقت الواقعى لأكتمال النشاط.
- الوقت التشاؤمى (b) = الوقت الذى سيحتاجه النشاط بافتراض ظروف غير مستحبة وسيكون أيضا هناك أحتمال صغير بأن النشاط سيأخذ فى الواقع هذا الوقت الطويل.

وغالبا، مايفترض PERT أن التقديرات الزمنية تتبع توزيع Beta الاحتمالى، أنظر الشكل (5- 2)، وحيث وجد أن هذا التوزيع المستمر – مناسب فى عديد من الحالات لتحديد القيمة المتوقعة والتباين لكل فترة زمنية مكتملة لكل نشاط.

شكل (5- 2)

توزيع بيتا الاحتمالى مع تقديرات لثلاث أزمنة



ولايجاد الفترة الزمنية المتوقعة (t) لنشاط ما، فإن توزيع بيتا يرجح التقدير كمايلى:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

ولحساب الانتشار أو التباين للتقدير الزمنى المتوقع، نستخدم المعادلة التالية* :

$$التباين = (\frac{b - a}{6})^2$$

والجدول التالى (5- 2) يبين التقديرات الزمنية لكل نشاط، والوقت المتوقع وتباينه فى ضوء المعادلات السابقة:

جدول (5- 2)

تقديرات الأوقات (بالأسبوع) لشركة مينا للاسمنت

النشاط	الوقـــــت			الوقت المتوقع	التباين
	التفاؤل a	الأكثر احتمالا m	التشاؤمى b	t =(a+4m+b)6	$[(b-a)/6]^2$
A	1	2	3	2	4/36
B	2	3	4	3	4/36
C	1	2	3	2	4/36
D	2	4	6	4	16/36
E	1	4	7	4	36/36
F	1	2	9	3	64/36
G	3	4	11	5	64/36
H	1	2	3	2	4/36
				25 اسبوع	

كيفية ايجاد المسار الحرج

وباكتمال حساب الوقت المتوقع لكل نشاط، فيعتبر ذلك حينئذ الوقت الفعلى لهذه المهمه. وسيعتبر لاحقا للتباين فى الزمن.

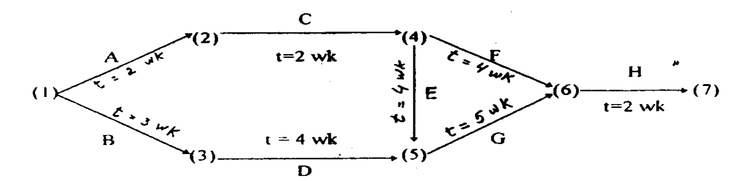
وبالرغم من أن جدول (5- 2) يشير إلى أن اجمالى الوقت المتوقع لكل الأنشطة التسعة للشركة هو 25 اسبوعا، فمن الواضح من الشكل (5- 3) أن العديد من المهام قد تأخذ مكانها تلقائيا. ولايجاد كم من الزمن سيأخذه المشروع سنقوم بالتحليل للمسار الحرج للشبكة.

* هذه المعادلة مبنية على مفهوم أحصائى مؤداه أن مابين طرفى توزيع بيتا يوجد 6 معايير قياسيه (± 3 معيار قياسى عن المتوسط). ولما كان (b-a) هو 6 معيار قياسى، فإن المعيار القياسى = (b-a)/6 وبالتالى فالتباين يساوى $[(b-a)/6]^2$.

ويعرّف المسار الحرج بأنه أطول وقت لطريق المسار خلال شبكة العمل. فإذا أراد العضو المنتدب تخفيض الوقت الكلى للمشروع فعليه أن يختزل طول بعض الأنشطة على المسار الحرج. كما أن أى تأخير فى أى نشاط على المسار الحرج سيؤخر اكتمال المشروع برمته.

شكل (5- 3)

شبكة عمل شركة مينا للأسمنت مع الوقت المتوقع للأنشطة



ولإيجاد المسار الحرج، نحتاج إلى تحديد الكميات التالية لكل نشاط فى شكبة العمل:

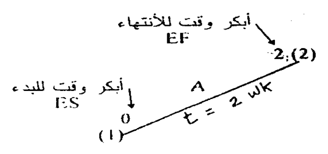
1- أبكر وقت للبدء Earliest Start Time (ES) لكل نشاط بدون مخالفة متطلبات النشاط السابق مباشرة.

2- أبكر وقت للانتهاء Earliest Finish Time (EF) حيث يمكن للنشاط أن ينتهى.

3- آخر وقت للبدء Latest Start Time (LS) لكل نشاط يمكن أن يبدأ بدون تأخير المشروع برمتة.

4- آخر وقت للانتهاء Latest Finish Time (LF) لكل نشاط ينتهى بدون تأخير المشروع برمتة.

ويبدأ العمل من بداية نشأة الشبكة بالحدث (1) لحساب (ES) و (EF) لكل نشاط. فللحدث الأول فدائما (ES) يساوى صفرا. ولما كان النشاط (A) له وقت متوقع قدره اسبوعان فإن (EF) له هو 2 كما يرى هنا.



وتحسب (EF) كالآتى:

$$EF = ES + t$$

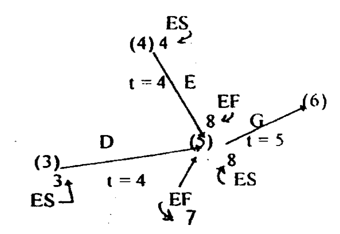
حيث t = الوقت المتوقع للنشاط

القاعدة لحساب (ES):

قبل بداية أى نشاط يجب أن تستكمل كل متطلبات النشاط السابق مباشرة. وفى كلمات أخرى، نبحث عن أطول مسار عند تحديد (ES). فعلى سبيل المثال، نرى أن (ES) للنشاط (C) هو أسبوعان، وأن النشاط السابق له مباشرة هو (A) الذى له (EF) أسبوعان.

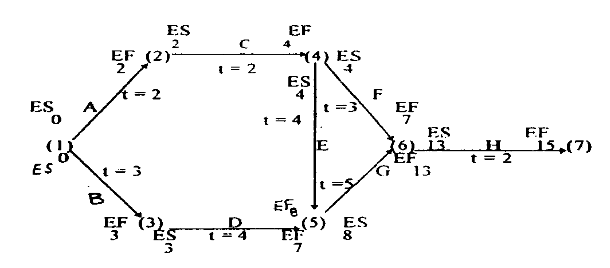
EF 2 ES 2 C EF 4
(2) (4)
ES 0 A t=2 t = 2
(1)

وبالنسبة للنشاط (G) فإن (ES) له هو ثمانية أسابيع، إذ له نشاطان سابقان مباشرة هما (D) و (E). ولما كان النشاط (D) له (EF) من سبعة أسابيع وأن EF لكل أنشطة (E) هى ثمانية أسابيع فإن ES للنشاط (G) يمكن أن يبدأ عند الأسبوع الثامن.



ولتكملة أوقات (ES) و (EF) لكل الأنشطة، سنجرى حساب مايسمى المرور للأمام Forward Pass للشبكة. والشكل (5- 4) يبين النتائج.

شكل (5- 4)
لأوقات (ES) ، (EF) لشبكة عمل شركة مينا للاسمنت



نلاحظ أن أبكر وقت يمكن فيه الانتهاء من المشروع هو 15 أسبوع، ذلك لأن النشاط (H) لايمكن أن يبدأ حتى 13 اسبوع (ES = 13) والوقت المتوقع هو اسبوعان ليكون EF = 13+2= 15 أسبوع. وما علينا إلا أن نتوقع أن مايمكن للعضو المنتدب للشركة عمله هو تركيب جهاز التحكم وضابط تلوث الهواء واختباره فى 15 أسبوع.

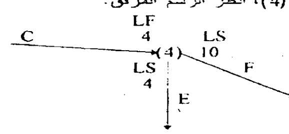
القاعدة لحساب (LF)

والخطوة التالية لايجاد المسار الحرج هى حساب (LS) ، (LF) لكل نشاط. حيث سنجرى حساب ما يسمى المرور للخلف للشبكة backward path،* أى البداية من النشاط الأخير وهكذا حتى الأنشطة الأولى. وهذا معناه تعيين LF للنشاط (H) مقدارها 15 أسبوع. وتعريف LF للنشاط بأنه الوقت الذى ينتهى فيه هذا النشاط بدون تأخير المشروع برمته ولحسابه نطبق القاعدة:

$$LS = LF - t$$

وتكون LS للنشاط (H) = 15-2= 13 اسبوع

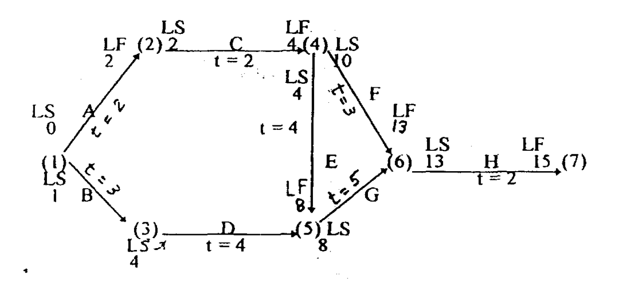
وعموما، فالقاعدة التى تطبق هى أن LF للوقت لأى نشاط تساوى أصغر (LS) للوقت لكل الأنشطة الراحلة عن هذا الحدث. ومن هذا فإن (LF) للنشاط (C) هو 4 أسابيع، حيث هو أصغر أوقات LS للنشاطين الراحلين عن الحدث (4)، أنظر الرسم المرفق.



ويبين الشكل (5- 5) أوقات (LS) ، (LF) لكل الأنشطة فى شركة مينا للأسمنت .

شكل (5- 5)

لأوقات (LS) ، (LF) لشبكة عمل شركة مينا للاسمنت



مفهوم المتاح Slack فى حسابات المسار الحرج

بحسابنا (ES)، (LS)، (EF) و(LF) فإنه يصبح من الميسور ايجاد قيمة المتاح من الوقت (الوقت الحر)، الذى لدى أى نشاط. **والمتاح هو طول الفترة التى يمكن لنشاط تأخيره بدون تأخير كل** المشروع. وحسابيا:

$$Slack = LS - ES \quad OR \quad = LF - EF$$

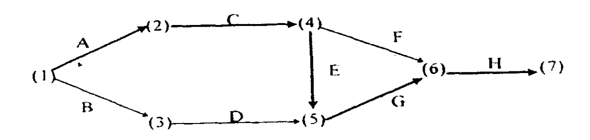
ويلخص الجدول (5- 3) (ES)، (LS)، (EF) و (LF) الأوقات المتاحة لكل الأنشطة فى شبكة عمل الشركة. فالنشاط (B)، على سبيل المثال، له اسبوع من الوقت المتاح حيث $LS - ES = 1 - 0 = 1$ (ومن ناحية أخرى $LF - EF = 4 - 3 = 1$). وهذا يعنى أن النشاط (B) يمكن أن يتأخر حتى أسبوع واحد بدون أن يتسبب ذلك فى اطالة وقت تنفيذ المشروع عما هو متوقع. وعلى الجانب الآخر، فالانشطة (A)، (C)، (E)، (G) و (H) ليس لديها وقت متاح. ولذلك فهم يُسمَّون بالأنشطة الحرجة وأنهم يقعون على المسار الحرج.

جدول (5- 3)
الوقت المتاح لشبكة عمل شركة مينا للاسمنت

النشاط	أبكر وقت لبداية (ES)	أبكر وقت لنهاية (EF)	آخر وقت لبداية (LS)	آخر وقت لنهاية (LF)	Slack الوقت المتاح (LS - ES)	على المسار الحرج ?
A	0	2	0	2	0	Yes
B	0	3	1	4	1	No
C	2	4	2	4	0	Yes
D	3	7	4	8	1	No
E	4	8	4	8	0	Yes
F	4	7	10	13	6	No
G	8	13	8	13	0	Yes
H	13	15	13	15	0	Yes

ويرى فى الشكل (5- 6) المسار الحرج لشبكة العمل بالأسهم الثقيلة. كما يرى أن الوقت الكلى لاكتمال المشروع هو 15 أسبوع، وهو أكبر رقم فى عمود (EF) أو (LF) من الجدول (5- 3).

شكل (5- 6)
المسار الحرج لشركة مينا للاسمنت



احتمال اكتمال المشروع

لقد رأينا مما سبق، أن تحليل المسار الحرج قد ساعدنا فى تحديد الوقت المتوقع لاكتمال المشروع فى 15 اسبوع. ولكن المسئول بالشركة يعلم أن عدم اكتمال المشروع فى 16 اسبوع سيعرضه لاغلاق الشركة بواسطة مراقبى البيئة. كما أنه يعلم بوجود تباين جوهرى فى التقديرات الزمنية للعديد من الانشطة. وهذا التباين للأنشطة التى على المسار الحرج يمكن أن يكون له تاثير على اكتمال المشروع برمته، ومن الممكن تأخيره. واحتمال حدوث ذلك هو ما يقلق المسئول. بالدرجة الاولى.

ويستخدم PERT تباين أنشطة المسار الحرج للمساعدة فى تحديد التباين على مستوى المشروع بأكمله. ويحسب تباين المشروع بجمع تباينات الانشطة الحرجة، كما يتضح من الآتى:

النشاط الحرج	التباين
A	4/36
C	4/36
E	36/36
G	64/36
H	4/36
	Total 112/36 = 3.111

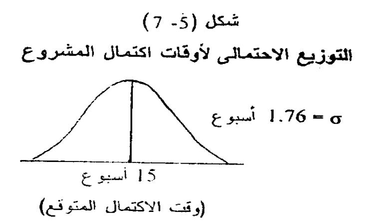
ويتبين مما سبق أن مجموع تباينات الأنشطة الحرجة = 3.111 وأن الانحراف العيارى هو الجذر التربيعى للتباين أى أن $\sigma_t = \sqrt{\text{تباين المشروع}}$

$$= \sqrt{3.111} = 1.76 \text{ أسبوع}$$

وتفيدنا هذه المعلومة فى الاجابة على الاسئلة الخاصة باكتمال تنفيذ المشروع فى الوقت المحدد. ويأخذ PERT فى ذلك فرضين: (1) أن توزيعات اكتمال تنفيذ المشروع كلية تتبع التوزيع الاحتمالى الطبيعى، (2) أن أوقات الانشطة مستقلة عن بعضها احصائيا. وبهذه الفروض فإن المنحنى ذى الشكل الناقوسى يمكن استخدامه لتمثيل بيانات المشروع. وهذا يعنى أيضا أن هناك فرصة قدرها 50٪ باكتمال المشروع فى أقل من 15 أسبوع المتوقع، كما أن هناك فرصة قدرها 50٪ بأن اكتمال المشروع سيزيد عن 15 اسبوع، كما يبينها الشكل (5- 7).

شكل (5- 7)

التوزيع الاحتمالى لأوقات اكتمال المشروع



ومن المعلوم أن الانشطة غير الحرجة لها أيضا تباين كما فى الجدول(5- 2). ويعنى ذلك أنه من الممكن للمسار غير الحرج أن يكون له درجة احتمال عالية لتكملة المشروع فى وقت أقصر من احتمال تكملته من خلال المسار الحرج. وفى الواقع، فإن مسارا حرجا مختلفا قد يتضح نتيجة للموقف الاحتمالى المذكور.

وحتى يمكن لمسئول الشركة ايجاد احتمال أن المشروع سيكتمل فى الوقت المحدد أو قبل 16 أسبوع، الوقت النهائى، فإنه سيحتاج الى تقدير المساحة المناسبة اسفل المنحنى الاحتمالى الطبيعى، كالاتى:

$$Z = \frac{\text{الوقت المتوقع للاكتمال} - \text{وقت التسليم}}{\sigma_t}$$

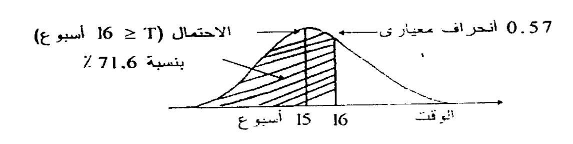
$$= \frac{16 - 15 \text{ أسبوع}}{1.76 \text{ أسبوع}} = 0.57$$

حيث Z = عدد الانحرافات المعيارية لوقت التسليم (أو وقت الهدف target date) التى تبعد عن المتوسط أو الوقت المتوقع.

وبالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعى بالملحق (أ)، نجد احتمالا قدره 0.71567 لقيمة Z المحسوبة. أى أن هناك 71.6 ٪ فرصة أن أجهزة التحكم فى تلوث الهواء ستكون فى مكانها فى خلال 16 اسبوعا أو أقل، كما يرى من الشكل (5- 8).

شكل (5- 8)

احتمالات مقابلة الشركة لـ 16 أسبوع (وقت التسليم)



بماذا أمكن PERT تزويد المسئول ؟

1 - أن الوقت المتوقع لاكتمال المشروع هو 15 أسبوع.

2 - أن هناك 71.6٪ فرصة أن الأجهزة المطلوبة ستكون فى مكانها خلال 16 اسبوع (وقت التسليم). وأن PERT يمكن بسهولة ايجاد احتمال اكتمال المشروع حسب التاريخ الذى يهمه.

3 - أن هناك خمسة أنشطة (H، G، E، C، A) على المسار الحرج، فإذا تأخر أى منهم لأى سبب، فسيتأخر كل المشروع.

4 - أن هناك ثلاثة أنشطة (F، D، B) غير حرجة، ولكن عندها وقت متاح، وهذا يعنى أن المسئول يمكنه الأفتراض من مواردهم، إذا احتاج، لامكانية الاسراع بالمشروع بأكمله.

5 - أمكن الحصول على جدول تفصيلى للنشاط بتواريخ البداية والنهاية- جدول (5- 3).

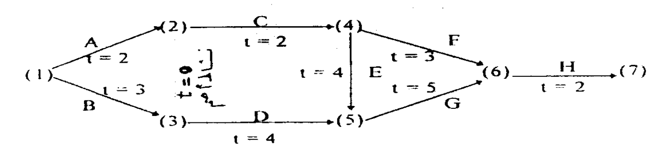
الأنشطة الصماء في PERT

قبل أن نترك أسس PERT، نود أن نشير إلى أنه من الضروري في بعض الأحيان استخدام أنشطة صماء Dummy Activities لرسم شبكة العمل. والنشاط الأصم هو نشاط تصوري لا وقت له (t = 0) يحشر لغرض أوحد وهو الحفاظ على المنطق للأحداث في الشبكة.

لتوضيح ذلك، نفترض أن الشركة لديها تحفظاً آخر على تركيب أجهزة مراقبة تلوث الهواء. وبمراجعة النشاط (D) (صب الخرسانة) نجد أن له نشاط واحد فقط سابق له وهو (B) في الشبكة الأصلية. ولكن ماذا يحدث لو أن النشاط (A) يلزم أن يكتمل قبل أن يبدأ (D)؟ ماذا يحدث لو أن النشاط (A) يأخذ 6 أسابيع بدلا من 2 اسبوع، ماذا سيحدث إذا لم تتغير الشبكة. فالحل للشبكة المعروض في جدول (5- 3) يوضح أن النشاط (D) يمكن أن يبدأ بعد 3 أسابيع (ES = 3 للنشاط D). ولكن لأن النشاط (A) يأخذ 6 أسابيع ويجب أن يكتمل قبل أن يبدأ النشاط (D)، فسيكون الحل الكامل غير صحيح. لذلك فإن استخدام النشاط الأصم يعتبر من أحسن الحلول لهذه المشاكل، حيث سيسمح لنا برسم وحل شبكة العمل بطريقة صحيحة. والحل لذلك كما نراه في الشكل (5- 9) كخط متقطع ليحشر مابين الحدث (2) والحدث (3) حتى يعكس الرسم الموقف الفعلي. هذا ولو أن ليس للنشاط الأصم وقت، إلا أنه من الممكن أن يكون له أثر على تحليل المسار الحرج. اختبر بنفسك لترى إن كان ذلك يحدث في مثلنا، وهل مازال المسار المذكور حرجا أو تغير نتيجة للنشاط الأصم كما في الشكل (5- 9).

شكل (5- 9)

تصور النشاط الأصم في شبكة عمل شركة مينا للاسمنت



PERT / COST

ولو أن PERT يعتبر طريقة ممتازة في المتابعة والمراقبة لطول المشروع زمنيا، إلا أنه لا يأخذ في أعتباره عنصرا هاما آخر وهو تكلفة المشروع، وPERT/Cost ما هو إلا طريقة معدلة لـ PERT تسمح لمدير المشروع بالتخطيط، والجدولة، والمتابعة، والمراقبة للتكاليف بالاضافة إلى الوقت.

تخطيط وجدولة تكاليف المشروع: تجهيز الميزانية

ويهدف المدخل العام لهذه العملية إلى تحديد كمية المنصرف كل أسبوع أو كل شهر. ويجرى ذلك خلال الأربع خطوات التالية:

1- التعرف على جميع التكاليف المصاحبة لكل نشاط، ثم أضف تلك التكاليف إلى بعضها للوصول إلى تكلفة واحدة مقدرة (او ميزانية) لكل نشاط.

2- اذا كنت تتعامل مع مشروع كبير، فقد يستطاع ضم عدة أنشطة فى عبوة عمل اكبر Work package. وهذه العبوة ماهى إلا مجموعة منطقية من الأنشطة. ولما كان مشروعنا الحالى صغيرا، فإن كل نشاط سيكون عبوة عمل.

3- تحويل ميزانية التكلفة لكل مشروع إلى تكلفة لكل وقت زمني؛ وذلك بافتراض أن تكلفة اكتمال أى مشروع ينفق بمعدل ثابت فى الزمن. فإذا كانت ميزانية التكلفة لنشاط معين هى 48.000 جنيه، وأن الوقت المتوقع لاكمال النشاط هو أربع أسابيع، فإن التكلفة / أسبوع هى 48.000 ÷ 4 = 12.000 جنيه.

4- باستخدام الوقت (ES)، (LS) أحسب كم من الأموال ستصرف كل اسبوع أو شهر لكى يكتمل المشروع فى الوقت المرغوب.

وبالرجوع إلى مثالنا بشركة مينا للأسمنت، وبعد قيام المسئول بحساب الميزانيات الاسبوعية لكل نشاط، وباستخدام بيانات سابقة بخصوص (ES)، (LS) لكل نشاط فقد أنشئ الجدول التالى (5- 4).

جدول (5- 4)

تكلفة النشاط لشركة مينا للاسمنت

النشاط	أبكر وقت لبداية (ES)	آخر وقت لبداية (LS)	الوقت المتوقع t	اجمالى تكلفة الميزانية	تكلفة الميزانية للأسبوع
A	0	0	2	22,000 جنيها	11,000 جنيها
B	0	1	3	30,000	10,000
C	2	2	2	26,000	13.000
D	3	4	4	48,000	12,000
E	4	4	4	56,000	14,000
F	4	10	3	30,000	10,000
G	8	8	5	80,000	16,000
H	13	13	2	16.000	8,000
				308,000 اجمالى	

وبالنظر إلى الجدول نرى أن اجمالى أن اجمالى التكاليف الكلية للميزانية للمشروع هو 308.000 جنيه وستساعدنا الميزانية الاسبوعية فى كيفية تقدم المشروع على اساس اسبوعى.

تكوين ميزانية اسبوعية

باستخدام الميزانية الاسبوعية من الجدول السابق، فإن (ES) للنشاط (A) على سبيل المثال هو صفر، ولأن النشاط (A) سيكتمل خلال أسبوعين، فإن الميزانية الاسبوعية وقدرها 11.000 جنيه ستنفق فى الاسبوع الاول والثانى. وللنشاط (B) فإن (ES) له هو صفر، والوقت المتوقع لاكتماله هو ثلاثة أسابيع، وتكلفة الميزانية الاسبوعية هى 10.000 جنيه أى أن 10.000 جنيه ستنفق على النشاط (B) فى كل من الاسبوع 1، 2، 3 وهكذا لباقى الانشطة. وبجمع هذه الكميات المنفقة أسبوعيا لكل الأنشطة نحصل على الميزانية الاسبوعية لكل المشروع، وهذا يتضح فى الجدول (5- 5).

جدول (5- 5)

تكلفة الميزانية لشركة مينا للأسمنت، باستخدام وقت (ES)

النشاط	الأسبوع															الاجمالى
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
A	11	11														22
B	10	10	10													30
C			13	13												26
D				12	12	12	12									48
E					14	14	14	14								56
F					10	10	10									30
G									16	16	16	16	16			80
H														8	8	16
[illegible]	21	21	23	25	36	36	36	14	16	16	16	16	16	8	8	308
[illegible]	21	42	65	90	126	162	198	212	228	244	260	276	292	300	308	
التكاليف بآلاف الجنيهات																

ويلاحظ من هذا الجدول أن النشاطين (A) ، (B) فقط هما الوحيدان اللذان يجرى تنفيذهما فى الاسبوع الأول حيث (ES) لهما هو الصفر، وبذلك يكون اجمالى ما سينفق خلال ذلك الاسبوع هو 21.000 جنيه. ونظرا لاستمرار نشاط (A) ، (B) فى الاسبوع الثانى فجملة الانفاق خلاله سيكون 21.000 جنيه. (ES) للنشاط (C) هى عند نهاية الاسبوع الثانى (ES = 2 للنشاط C) أى سينفق 13.000 جنيه على النشاط (C) فى الاسبوعين3، 4. ونظرا لأن النشاط (B) يمتد حتى الإسبوع الثالث، فإن اجمالى ماسينفق خلال الأسبوع الثالث هو 23.000 جنيه، وهكذا لنهاية المشروع لتقدير

التكلفة الاسبوعية. ومن التكلفة الاسبوعية واضافتها لبعضهـا نحصـل علـى مـا سينفق حتـى تاريخـه، وهى المبينة فى الصف الاسفل من الجدول.

ويجب أن تتفق جميع الانشطة على المسار الحرج لميزانياتها فى الأوقات المبينـة بـالجدول (5- 5)؛ أمـا الأنشطة التى ليست على المسار الحرج فيمكن أن تبدأ فى تاريخ متأخر. وهذا المفهوم مبنى أيضـا فـى (LS) لكل نشاط، لذلك فإذا استـخدم (LS) فسيمكن الحصـول علـى ميزانيـة أخـرى. وهـذه الميزانيـة ستؤخر انفاق الميزانية حتى اللحظة الأخيرة الممكنة. وتظهـر نتـائج الحسـابات الجديـدة فـى الجـدول (5- 6).

جدول (5- 6)

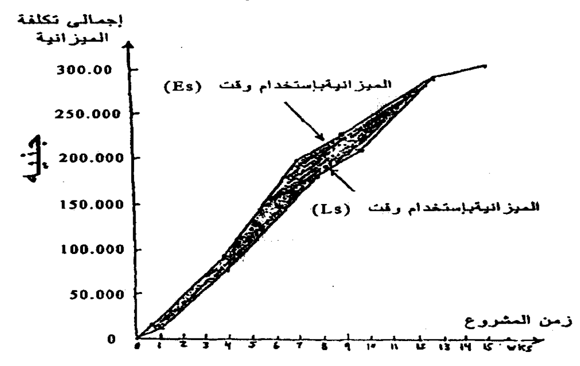
تكلفة الميزانية لشركة مينا للأسمنت، باستخدام وقت (LS)

	الأسبوع															
النشاط	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	الاجمالى
A	11	11														22
B		10	10	10												30
C			13	13												26
D					12	12	12	12								48
E					14	14	14	14								56
F											10	10	10			30
G									16	16	16	16	16			80
H														8	8	16
[illegible]	11	21	23	23	26	26	26	26	16	16	26	26	26	8	8	308
[illegible]	11	32	55	78	104	130	156	182	198	204	240	266	292	300	308	
التكاليف بآلاف الجنيهات																

وبمقارنـة الميزانيتين فـى جداول (5- 5) ، (5- 6) نجد أن الأمـوال التـى ستنفق حتـى تاريخـه فـى الميزانية الثانية أقل من الأولى فـى الاسـابيع القليلـة الأولـى ، لأن الميزانيـة معدة علـى اسـاس (LS). ولذلك تعـرض هذه الميزانيـة آخر وقت ممكن يمكن الانفـاق فيـه مـع اكتمـال المشـروع فـى الوقـت المرغوب. ومن ذلك العرض فإن للمسـئول حريـة الاختيـار لميزانيـة بيـن الميزانيتين المعروفتيـن فـى هذين الجدولين. وهذان الجدولان يبينان المدى الممكن للميزانية. ولقد عرض هذا المفهوم فى الشكل (5- 10) وذلك بتوقيع بيانات الأجمالى حتى تاريخه لكل من (ES) و (LS) ، وحيث يستطيع مسئول الشركة استخدام أى ميزانية فى المدى الممكن بين الميزانيتين ومـا يزال يكمل المشـروع فـى الوقـت المحـدد. والميزانيـات المماثلـة لمـا عـرض فـى الشكل (5- 10) هـى عـادة مـا تجهـز قبـل البـدء فـى المشروع، وكلما أكتمل المشروع فالأرصدة المنصرفة ستتابع وتراقب.

شكل (5- 10)

مدى الميزانية لشركة مينا للأسمنت



متابعة ومراقبة تكاليف المشروع Monitoring and Controlling Project Costs

إن الغرض من متابعة ومراقبة تكاليف المشروع هو التأكد من تقدم تنفيذ المشروع حسب الجدول وأن التكاليف الزائدة عما هو مقدر تكون تحت الملاحظة لتبقى فى أدناها. وأن موقف المشروع برمته يجرى التفتيش عليه دوريا.

ويرغب مسئول الشركة فى التعرف على تقدم المشروع. نحن الآن فى الاسبوع السادس من الـ 15 اسبوع، وقد تم تنفيذ واكتمال الأنشطة (A) ، (B) ، (C). وكانت التكلفة الفعلية لها هى 20.000 جنيه، 36.000 جنيه، 26.000 جنيه، على الترتيب. وقد أكتمل 10٪ من النشاط D وأن ما أنفق عليه هو 6.000 جنيه. وأن النشاط (E) أكتمل بنسبة 20٪ بتكلفة فعلية قدرها 20.000 جنيه. والنشاط (F) اكتمل بنسبة 20٪ بتكلفة قدرها 4.000 جنيه. أما الانشطة (G) ، (H) فلم تبدأ بعد. فالسؤال هل مشروع مقاومة تلوث الهواء يجرى حسب الجدول المخطط له؟ وماهو قيمة العمل الذى إكتمل؟ وهل هناك تكلفة تجاوزت حدود الميزانية Overrun؟

قيمة العمل المكتمل، أو القيمة حتى تاريخه لأى نشاط تحسب كالآتى:

= ٪ العمل المكتمل × اجمالى ميزانية هذا النشاط

كما أن الفروق للنشاط لتثير الاهتمام أيضا :

فرق النشاط = التلكفة الفعلية – قيمة العمل المكتملة

فإذا كان الفرق سالبا كانت التكلفة تحت حد الميزانية، ولكن إذا كان الفرق موجبا فمعناه تجاوز الميزانية المقترحة.

ويمدنا الجدول (5- 7) بهذه المعلومات عن الشركة.

جدول (5- 7)

متابعة ومراقبة تكلفة الميزانية (عند الاسبوع السادس من التنفيذ)

النشاط	(1) أجمالى تكلفة الميزانية	(2) % الاكتمال*	(3) قيمة العمل المكتمل (1) x (2)	(4) التكلفة الفعلية	(5) فرق النشاط (4) - (3)
A	22,000 جنيه	100	22,000 جنيه	20,000 جنيه	2,000 جنيه (—)
B	30,000	100	30,000	36,000	6,000
C	26,000	100	26,000	26,000	0
D	48,000	10	4,800	6,000	1,200
E	56,000	20	11,200	20,000	8,800
F	30,000	20	6,000	4,000	(—) 2,000
G	80,000	0	0	0	0
H	16,000	0	0	0	0
			100,000 الاجماليات	112,000	12,000 تكلفة زائدة

* يمكن حساب نسبة الاكتمال لكل نشاط بطرق أخرى. فعلى سبيل المثال، يمكن اختيار نسبة ساعات التشغيل المتحققة إلى عدد ساعات التشغيل الكلية المقدرة.

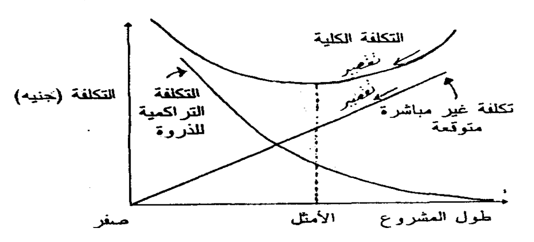
ويرى من هذا الجدول أنه فى الاسبوع السادس من التنفيذ كان هناك تكلفة زائدة قدرها 12.000 جنيه، وأن قيمة العمل الذى أكتمل هو فقط 100.000 جنيه، وأن التكلفة الفعلية للمشروع حتى هذا التاريخ هى 112.000 جنيه. وكيف تقارن هذه التكاليف مع تكلفة الميزانية للأسبوع السادس؟ فإذا قرر مسئول الشركة استخدام ميزانية (ES) أقرب وقت للبدء (جدول5- 5) فسنرى أن هناك 162.000 جنيه يجب أن تكون قد صرفت. ومع ذلك، فالمشروع يجرى خلف الجدول، كما أن هناك تكلفة زائدة. فالمسئول يريد أن يسرع بالتنفيذ للانتهاء فى موعده، كما يجب مراقبة صرف التكلفة المستقبلية محاولا ازالة التكلفة الزائدة الحالية 12.000 جنيه. فلرقابة ومتابعة التكاليف، ومقررات الميزانية، وقيمة الاعمال المنفذة، التكاليف الفعلية، فعلى المسئول اجراء هذه الفحوص بصفة دورية.

وفى القسم التالى، سنرى كيفية تقصير المشروع بانفاق أموال اضافية. وهذا الاسلوب يسمى طريقة المسار الحرج Critical Path Method (CPM). ويعكس هذا التطبيق الجهود اللازمة لتفادى عقوبات تأخير التنفيذ أو الاستفادة من الحوافز المالية فى حالة أنهاء المشروع فى الوقت المحدد، أو

لتحرير بعض الموارد لاستخدامها فى مشروعات أخرى. ومع كل، ففى عديد من الحالات، فالرغبة فى تقصير مدة تنفيذ المشروع لتعكس بالكاد محاولة لتقليل النفقات غير المباشرة المصاحبة لتنفيذ المشروع، مثل تكاليف التسهيلات والآلات. والاشراف والعمالة والعاملين. ولدى المسئولين خيارات مؤكدة تحت تصرفهم تسمح لهم بضغط الوقت أو الوصول للذروة Crash لأنشطة معينة، من بينها استخدام أرصدة اضافية لاحضار عاملين اضافيين، أو أجهزة أكثر كفاءة، وعدم التزمت التام لبعض مواصفات العمل. وفى هذا التقصير لوقت المشروع يتحقق للمسئول الاقتصاد فى التكاليف غير المباشرة بزيادة التكاليف المباشرة للاسراع بعمليات التنفيذ. فالهدف من تقييم المفاضلة لـ الوقت/التكلفة هو للتعرف على خطة من شأنها تدنية اجمالى التكلفة المباشرة والغير مباشرة للمشروع، كما يتبين من الشكل التالى (5- 11).

شكل (5- 11)

الكمية المثلى للذروة وما ينتج عنها من تدنى اجمالى التكاليف



وعلى غير PERT فإن CPM لايستخدم مفهوم الاحتمالات، وانما يستخدم مجموعتين من تقديرات الوقت والتكلفة للأنشطة:

1 - الوقت العادى Normal والتكلفة العادية لكل نشاط

2 - وقت الذروة Crash وتكلفة الذروة لكل نشاط.

بالاضافة إلى:

3 - قائمة الأنشطة على المسار الحرج

وتقدير الوقت العادى فهو مثل PERT الوقت المتوقع، أما التكلفة العادية فهى تقدير لكم من الأموال تلزم لتكملة نشاط فى وقته العادى، ووقت الذروة فهو أقصر وقت ممكن للنشاط، أما تكلفة الذروة فهى ثمن اكتمال تنفيذ النشاط على اساس الذروة أو الوقت النهائى **deadline**. وتتبع حسابات CPM نفس خطوات PERT: بايجاد (ES)، (LS)، (EF)، (LF) والوقت المتاح Slack.

ذروة المشروع مع CPM (Project Crashing with CPM)

نفترض أن شركة مينا للأسمنت قد أمهلت 12 أسبوع بدلا من 16 أسبوع لاقامة أجهزة التحكم فى تلوث الهواء أو تواجه قرار المحكمة باغلاقها. وكما نعرف فإن تقديرات المسار الحرج بواسطة المسئول كانت 15 أسبوعا. فماذا يفعل؟ مالم يكن قادرا على تقليص الفترة الزمنية لبعض الأنشطة. وهذه العملية تسمى Crashing. وبطبيعة الحال، فإن Crashing تتكلف أموالا أكثر، والمسئولون عادة يهمون بالاسراع فى انهاء المشروع بأقل قدر من التكلفة الاضافية.

وتجرى حسابات Crashing من خلال الخطوات التالية:

1- ايجاد المسار الحرج العادى، والتعرف على الأنشطة الحرجة

2- حساب تكلفة Crash \ أسبوع (أو فترة زمنية أخرى) لكل الانشطة فى الشبكة

$$\text{Crash Cost / Time Period} = \frac{\text{Crash Cost - Normal Cost}}{\text{Normal time - Crash time}}$$

3- اختيار النشاط على المسار الحرج، والذى له أقل تكلفة Crash \ اسبوع. اضغط هذا النشاط إلى اقصى حد ممكن، أو إلى النقطة التى تصل فيها الى الوقت المرغوب للمشروع.

4- التأكد من أن المسار الحرج الذى ضُغط Crashed مازال حرجا، فأحيانا تقليص وقت النشاط الموجود على المسار الحرج قد يتسبب عنه مسار غير حرج أو مسارات لتصبح حرجة. فإذا كان المسار الحرج مازال أطول مسار خلال شبكة العمل، فيرجع إلى الخطوة 3، وإلا فابحث عن مسار حرج جديد ثم العودة إلى الخطوة 3.

يبين الجدول (5- 8) البيانات العادية والذروة لشركة مينا للأسمنت

جدول (5- 8)

البيانات العادية والذروة لشركة مينا للأسمنت

النشاط	(1) الوقت (أسابيع)	(2)	(3) التكلفة (جنيه)	(4)	(5)	(6)
	عادية	ذروة	عادية	ذروة	تكلفة الذروة للأسبوع [4-3]/[1-2]	المسار الحرج
A	2	1	22,000	23,000	1,000	Yes
B	3	1	30,000	34,000	2,000	No
C	2	1	26,000	27,000	1,000	Yes
D	4	3	48,000	49,000	1,000	No
E	4	2	56,000	58,000	1,000	Yes
F	3	2	30,000	30,000	500	No
G	5	2	80,000	86,000	2,000	Yes
H	2	1	16,000	19,000	3,000	Yes

لاحظ على سبيل المثال، أن الوقت العادى للنشاط (B) هو ثلاث أسابيع (لقد أستخدم نفس التقدير لـ PERT) ووقت الذروة لـه هو اسبوع واحد، وذلك يعنى امكانية تقليل الوقت بمقدار اسبوعين إذا توفرت موارد اضافية. واذا كانت التكلفة العادية هى 30.000 جنيه بينما تكلفة الذروة 34.000 جنيه، فهذا يتضمن أن نشاط الذروة (B) سيكلف الشركة 4.000 جنيه اضافية. ويفترض CPM أن تكاليف الذروة هى خطية، وتكون تكلفة الذروة\اسبوع للنشاط B كمايلى:

$$\text{Crash Cost / Week} = \frac{\text{Crash Cost - Normal Cost}}{\text{Normal Time - Crash Time}}$$

$$= \frac{£34,000 - 30,000}{3-1} = £\ 2000 / \text{اسبوع}$$

والانشطة (A) ، (C) ، (E) تقع على المسار الحرج، ولها تكلفة ذروة دنيا \ اسبوع = 1000 جنيه. ويمكن لمسئول الشركة ضغط (A) بأسبوع واحد ، (E) بأسبوعين محققا بذلك تكلفة اضافية قدرها 3.000 جنيه.

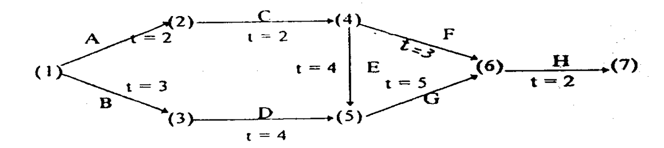
ويمكن لشبكات العمل الصغيرة استخدام الخطوات الاربع لايجاد أقل تكلفة لتخفيض وقت انتهاء المشروع، وللشبكات الاكبر ، يصبح هذا المدخل صعبا عمليا، مما يستتبع استخدام اساليب اكثر تقنية مثل البرامج الخطية.

ذروة المشروع مع البرمجة الخطية Project Crashing with Linear Programming

أشتقت البيانات اللازمة لذلك من الجدول (5- 8) والشكل (5- 12) .

شكل (5- 12)

شبكة العمل وأوقات الأنشطة لشركة مينا للأسمنت



ونبدأ بتحديد متغيرات القرار، فإذا كانت × هى الزمن الذى سيأخذه الحدث، مقيسا منذ بداية المشروع، حينئذ:

وقت الحدث (1) الذى سيحدث = X_1

وقت الحدث (2) الذى سيحدث = X_2

وقت الحدث (3) الذى سيحدث = X_3

وقت الحدث (4) الذى سيحدث = X_4

وقت الحدث (5) الذى سيحدث = X_5

وقت الحدث (6) الذى سيحدث = X_6

وقت الحدث (7) الذى سيحدث = X_7

وتُعرّف Y بأنها عدد الأسابيع التى يبلغ فيها النشاط ذروته Crashed، فيكون Y_A هو عدد الأسابيع التى تقرر فيها ضغط النشاط (A)، وهكذا حتى Y_H.

دالة الهدف Objective Function

لما كانت دالة الهدف هى تدنى تكلفة الذروة لكل المشروع، فيكون هدف دالة LP كالآتى:

$$\text{Minimize Crash Cost} = 1000\, Y_A + 2000\, Y_B + 1000\, Y_C + 1000\, Y_D + 1000\, Y_E + 500\, Y_F + 2000\, Y_G + 3000\, Y_H$$

وتلك معاملات التكاليف أخذت من عمود الجانب الأيمن من الجدول (5- 8).

قيود ذروة الوقت Crash Time Constraint

ونحتاجها للتأكد من أن كل نشاط لايبلغ ذروته اكثر من الحد الأقصى المسموح له به للذروة. والأقصى لكل متغير Y هو الفرق بين الوقت العادى Normal ووقت الذروة (الجدول5- 8).

$Y_A \le 1$ $\quad$ $Y_E \le 2$

$Y_B \le 2$ $\quad$ $Y_F \le 1$

$Y_C \le 1$ $\quad$ $Y_G \le 3$

$Y_D \le 1$ $\quad$ $Y_H \le 1$

قيد اكتمال المشروع Project Completion Time

وهو ينص على أن آخر حدث يجب أن يأخذ مكانه قبل الوقت الرسمى لانتهاء المشروع، فإذا كان مشروع المسئول يجب أن يضغط إلى 12 أسبوع، حينئذ:

$$X_7 \le 12$$

قيود تصف الشبكة Constraints Describing the Network

وتصف تلك القيود الأخيرة تركيب الشبكة، إذ سيكون هناك قيد أو أكثر لكل حدث، ونبدأ ذلك بتحديد وقت حدوث الحدث **(1)** ليكون $X_1 = O$.

وللحدث (2):

X_2	$\geq$ (A) الوقت العادى للنشاط	− Y_A	+	O
(وقت حدوث الحدث 2)	(النشاط (A) يحتاج) (2 أسبوع)	(عدد اسابيع الذروة للحدث (A))		بداية الوقت للنشاط (A) $(X_1 = O)$

$$X_2 \geq 2 - Y_A$$
$$X_2 + Y_A \geq 2$$

وللحدث (3):

$$X_3 \geq 3 - Y_B + O$$
أو $X_3 + Y_B \geq 3$

وللحدث (4) فنعلم أن النشاط (C) يبدأ مع الحدث (2)، X_2 لاتساوى صفرا.

$$X_4 \geq 2 - Y_C + X_2$$
أو $X_4 - X_2 + Y_C \geq 2$

وللحدث (5) فنحتاج إلى قيدين. الأول يمثل المسار من النشاط (D)

$$X_5 \geq 4 - Y_D + X_3$$
أو $X_5 - X_3 + Y_D \geq 4$

أما القيد الثانى فهو المسار على طول النشاط (E)

$$X_5 \geq 4 - Y_E + X_4$$
أو $X_5 - X_4 + Y_E \geq 4$

وللحدث (6) فكذلك هناك قيدان مطلوبان.

$$X_6 \geq 3 - Y_F + X_4$$
أو $X_6 - X_4 + Y_F \geq 3$

أما القيد الثانى فهو:

$$X_6 \geq 5 - Y_G + X_5$$
أو $X_6 - X_5 + Y_G \geq 5$

وللحدث (7)

$$X_7 \geq 2 - Y_H + X_6$$
أو $X_7 - X_6 + Y_H \geq 2$

وبعد اضافة القيود الغير سالبة non-negativity فيمكن حل مشكلة البرمجة **الخطية للقيم المثلى** Yحيث :

$$X_1, X_2 ------ X_7, Y_A, Y_B ----- Y_H \geq O$$

مزايا وقصور PERT

يعد PERT والأساليب المماثلة لجدولة المشروعات - بخدمات هامة لمدير المشروع، ومن أهم تلك الخدمات مايلي:

1- إن استخدام هذه الاساليب يجبر المدير على تنظيم، وأعطاء الصفة الكمية للمعلومات المتاحة والتعرف على المعلومات الاضافية التي يحتاجها.

2- أن هذه الأساليب تزود المدير بالعرض البياني للمشروع مع أهم أنشطته.

3- أنها تتعرف على:

أ - الأنشطة التي سيجرى متابعتها عن قرب تحسبا لتسببها في تأخير تنفيذ المشروع.

ب - الأنشطة الأخرى التي لها وقت متاح، والتي يمكن تأخيرها بدون احداث تأخير تنفيذ تكملة المشروع.

وهذا يثير أمكانية اعادة توزيع الموارد لتقصير فترة تنفيذ المشروع إلا أنه لاتخلو الاساليب التحليلية من القصور، ومن أهم مايواجهها PERT الآتي:

1- أنه عند وضع تصميم شبكة العمل، فقد يحذف نشاط أو نشاطان هامان.

2- أن العلاقات السابقة بين الأحداث قد لاتكون صحيحة كما شوهد من قبل.

3- أن تقديرات الأوقات غالبا ما تكون غير دقيقة وتسبب عدم الارتياح للمسئولين عن التنفيذ لتعودهم على الانتهاء من التنفيذ خلال وقت محدد.

4- أن استخدام الحاسب الآلي لاغنى عنه في المشروعات الكبرى.

توصيات عامة عند انشاء شبكات العمل

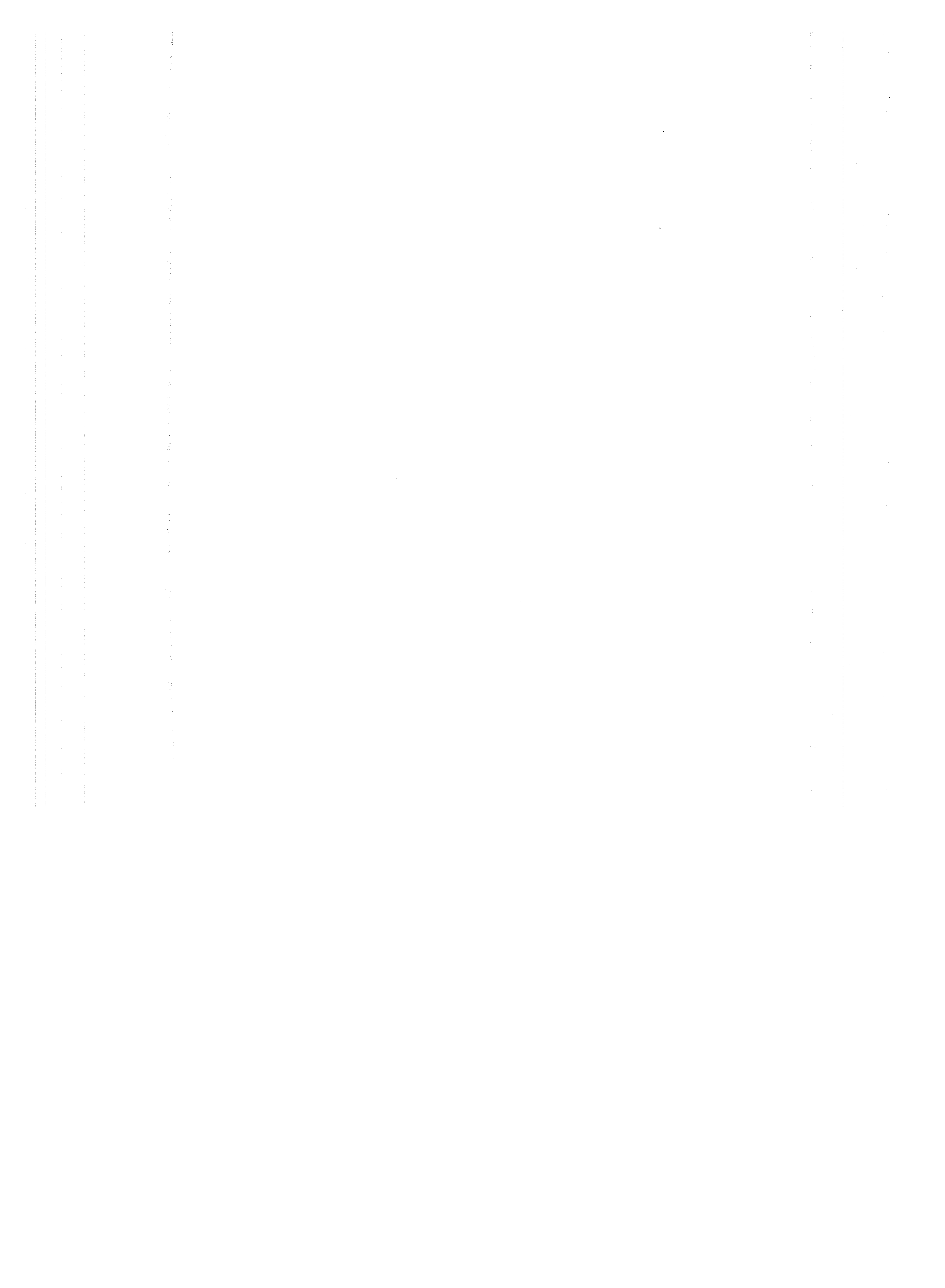
أولا : عرض الأنشطة التي ليس لديها أنشطة مسبقة، من الجانب الأيسر من تصميم الشبكة.

ثانيا : عرض الأنشطة التي لديها أنشطة مسبقة - على تقاطع المسارات.

ثالثا : تتبع قائمة الأنشطة تنازليا لتجنب السهو في تناولها.

رابعا : استخدم سهم واحد فقط ليصل بين حدثين.

خامسا: تجنب تقاطع المسارات.



ب - PERT في البحوث وتطوير استخدام نتائجه فى التطبيقات التجارية

Pert in Research and Development Management

يبين الشكل (5-13) عرضاً لمشروع بحث يهدف إلى تطوير وجبة عشاء جاهزة ومعبأة.وتشتمل الوجبة على عبوة بها شعرية جافة ، علبة من مخلوط خضروات ، وكيس من التوابل المختلطة . وعند تقرير الإدارة لنوعية الناتج الجديد المزمع تسويقه، وتوفير أرصدة الميزانية اللازمة لبداية برنامج بحثي – فسيجرى تحضير عينة أولية من الناتج الجديد،مع العرض التوضيحى لتتابع الأحداث. مبدئياً، سيبدأ برنامج البحث فى أربع مجوعات منفصلة كما تبينها الأحداث 2& 3& 5&4&. ويمثل اختيار الشعرية الجافة الحدث (2) – قمة نشاط تحدد له ما يبين 2-8 أسبوع مع زمن أكثر قبولاً قدره 4 أسابيع،وتلازم القرارات الخاصة بالملمس ، والطعم ، والشكل، والمظهر العام، والتكلفة – الزمن المقدر لها للوصول على أحسن القرارات . ويمثل الحدث (3) تطوير مخلوط التوابل من حيث الطعم وتوافقه مع المكونات الأخرى للوجبة والتكلفة،وكان الوقت المقدر لذلك النشاط يتراوح ما بين 4-10 أسبوع مع زمن أكثر قبولاً قدره 8 أسابيع . أما الحدث (4) فيتعلق بتطوير مخلوط الخضروات، وسيتضمن قرارات تتعلق بالقبول ، والملمس، والشكل والتكلفة، ويتراوح التقدير الزمنى لذلك ما بين 4 -12 أسبوع مع زمن أكثر قبولاً قدره8 أسابيع. وأخيراً الحدث (5) وهو التحضير لتصميم العبوة الأولية حيث تتعلق مشاكله بتحديد نوعية العبوة الأساسية لكل من مكونات الوجبة الغذائية ؛ فعلى سبيل المثال ، هل سيعبأ مخلوط التوابل فى السلوفان أو رقائق الألومنيوم ؟ وهل ستعبأ الشعرية الجافة فى السلوفان أو رقائق الألومنيوم؟ فإذا كانت تلك الوجبة الحديثة ستصبح أحد الشواهد الجديدة لهذه النوعية من خطوط الإنتاج ، فإن مكوّن العبوّة الأساسية سيكون معروفاً مقدماً ، أما إذا كان الوضع غير ذلك فيجب أن تعطى العناية الجادة لنوعية العبوة وخاصة إذا كانت تلك الوجبة هى الأولى من نوعها فى الخط الإنتاجى .وقد أعطى هذا النشاط فترة زمنية مماثلة للحدث (4).

وبوصولنا للأحداث (2) ، (3) ، (4) ، (5) فقد يكون المشروع فى طريقه المرسوم. أما الحدث (6) والذى يُتوّج ما سبقه من أحداث ، إذ يتضمن عمل حكام التذوق وأى إعادة تشكيل ضرورية ، حيث تحتاج تلك العملية إلى الخبرة الحسية للمحكمين بما لديهم من خبرات تتعلق بمعامل التغذية ، وما يرغبه قسم التسويق فى الناتج النهائى ، بالإضافة إلى إعطاء الوقت والخبرة إلى محللى نتائج التذوق (الخبرة الحسية) . وقد قدّر الوقت لاكتمال ذلك الحدث ما بين 4 – 8 أسابيع مع زمن أكثر قبولاً قدره 6 أسابيع.

وباستكمال الحدث (6) يمكن أن تبدأ أحداث (8) ، (9) ، (10). والحدث (8) هو لاختبار عملية التصنيع والمليء للتعرف على ما قد يحدث من مشاكل فى الإنتاج وحلها مسبقاً. والحدث (9) هو لدراسات

عمر الناتج على الأرفف shelf – life حيث ستتضمن ثلاث دراسات زمنية منفصلة : (أ) 3 أشهر (13 أسبوعاً) اختبار عمر الناتج ، (ب) اختبار 6 أشهر (26 أسبوع)، (جـ) اختبار 12 شهر (52 أسبوع). ولذلك يحتاج هذا الحدث لاكتماله سنة كاملة، ولكن إذا قرر القائمون على المشروع الدخول إلى الحدث التالى بعد اكتمال نتائج اختبار 3 أشهر ، فقد لا يقيد ذلك المشروع فى اكتماله. وفيما يختص بمبرمج PERT فإن ما يحتاجه هذا النشاط هو ثلاثة أشهر لإتمامه. أما الحدث (10) والخاص باختبار محكمى المستهلك ففى كل الأحوال سيحتاج إلى هيئة خارجية للاختبار . لذلك يجب أن تمنح هذه الهيئة الوقت الكافى لاختيار قائمة المحكمين والحصول على و تحليل نتائج الاختبار . وفى سبيل تحقيق ذلك فيتطلب الأمر ما بين 4 -8 أسبوع مع زمن أكثر قبولاً قدره 6 أسابيع . أما الحدث (7) الخاص بمراقبة جودة تقييم مواد التعبئة للشعرية الجافة ومخلوط التوابل فسيتضمن اختبار مواد التعبئة لانتقال البخر (النفاذية) ، واختبار توافق الناتج والمغلف ، وتقدير قوة اللحام. وباكتمال الأنشطة (8) ، (9) ، (10) ، (7) فيشار بالبدء فى النشاط (11) الخاص بالتحضير لتقديرات التكاليف. ويتوقف تقدير طول مدة هذا النشاط علىما إذا كان هذا الناتج الجديد يتمشى مع الإنتاج الحالى للمؤسسة، فإذا كان الأمر كذلك فقد تحددت التكلفة ، وإلا سيبذل الجهد الكافى للوصول إلى تقدير جيد لذلك. وقد ينقضى أيضاً زمن آخر فى انتظار مسئولى المشتريات لعرض آخر بيان بالأسعار سواء كان الناتج يتمشى مع النشاط الحالى للمؤسسة من عدمه.

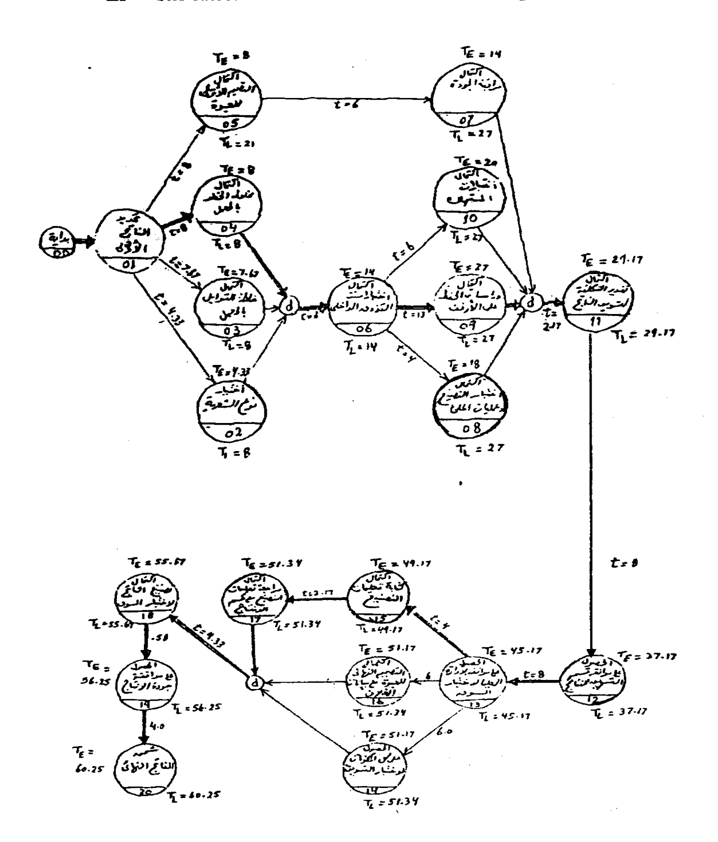
وتعتمد موافقة قسم التسويق فى كل الأحوال على توافر بيانات محددة (تدخل فى تصميم البيان التوضيحى لـ PERT) ، وهى نتائج اختبارات التذوق ، والتقديرات الأولية للتكلفة ، والتصميم الأولى للعبوة.ولما كان تصميم العبوة هو غالباً ما يعكس فكر الشركة ، فالموافقة عليه تتطلب أيضاً موافقة أعضاء الإدارة العليا . وبالإضافة إلى ذلك ، فإن موافقة أعضاء الإدارة العليا تتطلب موافقة الأقسام الأخرى بالشركة على التصميم لوقف أى عقبات قد تنشأ مستقبلاً من عدم التوافق التام مع تصميم عبوة قسم آخر من الشركة .

وأخيراً نصل إلى أهم النقاط الحرجة فى المشروع ، الحدث (13) وهو الحصول على موافقة الأعضاء التنفيذيين بالإدارة العليا لإجراء اختبار التسويق. وعند هذا الموقف فالأمر يتعلق باقتصاديات المشروع ، وكذلك الأسئلة الخاصة بالميزانية والتمويل.

شكل (13-5) لشبكة عمل تطوير وجبة العشاء الجاهزة (الجزء العلوى)

EF = The Cumulative expected time for any event = T_E

LF = The latest allowable time for an event = T_L



أما الحدث (14) فهو خاص بشراء المكونات لاختبار السوق ، وهو لا يحتاج إلى تعليق . أما الحدث (16) فهو ببساطة استمرار للحدث (5) مع الاهتمام المكثف لبيانات الغلاف مع استيفائها لكل المتطلبات القانونية. والحدث (15) فهو الإعداد لتعليمات التصنيع، والتى يراعى فيها مواصفات المكونات وسياسات التصنيع ، إضافة إلى ذلك ، فالعناية يجب أن توجه إلى التأكد من أن جميع تعليمات التصنيع تتسق مع المواصفات المرغوبة للناتج وخصائصه.

والحدث (17) يتعلق بمراجعة تعليمات التصنيع مع قسم الإنتاج ، وغنى عن التعليق ، كما يمتد الحال إلى الأحداث (18) ، (19) ، (20).

ويظهر تحليل PERT من الشكل التوضيحى المرفق أن الأحداث (1) ، (4) ، (6) ، (9) ، (11) ، (12) ، (13) ، (15) ، (17) ، (18) ، (19) ، (20) تقع على المسار الحرج، وفى كلمات أخرى، فإن تطوير إنتاج مخلوط الخضروات ، ودراسات عمر الناتج على الأرفف ، ومؤخراً الإعداد ومراجعة تعليمات التصنيع هى المواقع الحرجة فى المشروع .وستكون لهذه المعلومات من الأهمية الخاصة إذا ووجه مدير المشروع بقيود زمنية متباينة.

***

ملحق " أ " للباب الخامس

1.55
Standard Deviations
Area is
.93943
0 1.55
Mean Z

Example: To find the area under the normal curve, you must know how many standard deviations that point is to the right of the mean. Then, the area under the normal curve can be read directly from the normal table. For example, the total area under the normal curve for a point that is 1.55 standard deviations to the right of the mean is .93943.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Source: Reprinted from Robert O. Schlaifer, *Introduction to Statistics for Business Decisions*, published by McGraw-Hill Book Company, 1961, by permission of the copyright holder, the *President and Fellows of Harvard College*.

الباب السادس
نماذج مراقبة المستوى الكمى للمخزون

مقدمة

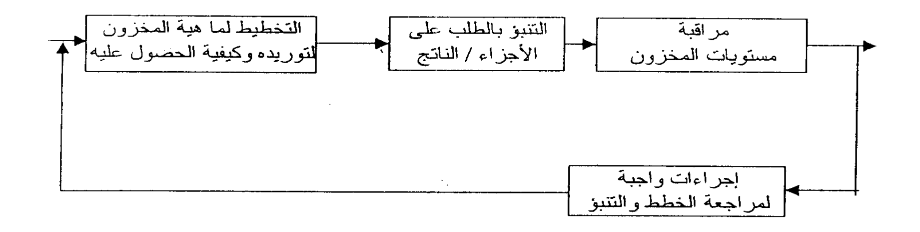
يعتبر المخزون من أكثر ممتلكات الشركات تكلفة وأهمية لما يصاحبه من تمويل والمحافظة على مستوى كمياته، إذ تصل نسبته إلى حوالى 40 % من إجمالى رأس المال المستثمر. ولأهميته فتحاول المؤسسة تقليل تلك التكلفة بتقليل ما فى متناول يدها من المخزون، وعلى الجانب الآخر يصبح العملاء غير راضين عندما ينفد المخزون بصفة متكررة (عدم وجود رصيد). ولذلك فعلى هذه المؤسسات إحداث توازن بين مستويات المخزون الدنيا والعليا محققين بذلك تدنية التكاليف.

ويشمل المخزون الموارد المخزونة لمواجهة الاحتياطيات الحاضرة والمستقبلية، وتمثل المواد الأولية والتى تحت التشغيل، والناتج النهائى، نماذجاً للمخزون، والناتج النهائى ما هو إلا طلب مشتق. فإذا عرفنا مثلاً الطلب على المياه الغازية، فيمكننا تحديد الزجاجات المطلوبة، والسكر المستخدم، ومياه الصودا، والأغطية للزجاجات المطبوعة، الخ... اللازمة لإنتاج الناتج النهائى.

وكل المؤسسات لها نوع ما من تخطيط ومراقبة لمستويات المخزون، يسرى هذا على بنوك الدم للتخطيط لتوفير رصيد من الأموال النقدية، وكذلك المستشفيات، وكذلك المدارس. وعموماً كل مؤسسة للتصنيع والإنتاج تأخذ فى حسابها تخطيط ومراقبة مستويات مخزونها، فالمخزون هو الخيط الرفيع الذى يربط كل وظائف وأقسام المؤسسة.

ويبين الشكل (6-1) المكونات الأساسية لتخطيط مخزون ونظام المراقبة. فالاهتمام الأول لمرحلة التخطيط يتعلق بنوع المخزون الذى سيتعين تدبيره وكيفية الحصول عليه (سواء بالتصنيع أو بالشراء)، وحينئذ تستخدم تلك المعلومة فى التنبؤ بالطلب على المخزون ومراقبة مستوياته. وتزودنا الخلفيات لهذه العملية برؤية لمراجعة الخطة والتنبؤ المبنى على الخبرة والملاحظة.

شكل (6-1) التخطيط ومراقبة المخزون



أهمية مراقبة المخزون

تخدم مراقبة المخزون مهاما هامة وهى:

1- الموازنة	The decoupling function
2- تخزين الموارد	Storing resources
3- التحوط ضد التضخم	A hedge against inflation
4- مجابهة عدم انتظام العرض والطلب	Irregular supply and demand
5- طرح كميات كبيرة لقاء خصومات نقدية	Quantity discounts
6- تجنب نفاذ المخزون وقصوره	Avoiding stockouts and shortages

الموازنــة:

ومعناها أنه إذا لم يتراكم مخزون فقد يكون هناك تأخيرات وعدم كفاءات. فعلى سبيل المثال إذا كان هناك نشاط تصنيعى يجب أن يكتمل قبل بدء النشاط التالى، فإنه قد يوقف كلية العملية الإنتاجية، ولكن إذا كان هناك مخزون سلعى بين كل نشاط فقد يقوم بدور تنظيمى buffer فى عمليات التشغيل.

تخزين الموارد:

تعتبر الزراعة والمنتجات الغذائية البحرية من الأنشطة التى لها مواسم محددة لحصاد نتاجها، بينما الطلب على هذه المنتجات ثابت خلال العام، لذلك ففى هذه الحالات وما يشابهها تستخدم فكرة المخزون فى تلقى هذه الموارد لتخزينها.

وفى العملية التصنيعية فيمكن تخزين المواد الخام ذاتها أو فى صورتها التشغيلية، والمنتجات النهائية، فإذا كانت شركتك تصنع عربات قص حشائش الحدائق المنزلية فقد يمكنك الحصول على إطارات هذه العربات من مصنع آخر. فإذا كان لديك 400 عربة قص حشائش و 300 إطار مخزون، ففى الواقع أن لديك 1900 إطار مخزون [ثلثمائة إطار مخزنة لذاتها و 1600 (1600= 4 إطارات لكل عربة قص حشائش × 400 عربة قص حشائش) إطار مخزون من الناتج النهائى لعربات قص الحشائش].

التحوط ضد التضخم:

فإذا وضعت نقودك فى صورة أرصدة نقدية فى بنك، فقد يكون باستطاعتك الحصول على 10 % كعائد. وعلى الجانب الآخر فإذا ارتفعت أسعار بعض المواد بأكثر من 20 % سنوياً ، لذلك فمن المستحسن استثماريا الحفاظ على الأرصدة التمويلية فى صورة مخزون ، وبالطبع مدخلا فى الاعتبار تكلفة الاحتفاظ به أو مناولته.

مجابهة عدم انتظام العرض والطلب:

وهذا يدعو إلى تخزين كميات مؤكدة كضرورة مطلقة. فإذا كانت أكبر الكميات المطلوبة من المشروعات ذات السعرات الحرارية المنخفضة هى خلال فترة الصيف، فما عليك إلا التأكد من وجود مصدر عرض كاف لمقابلة هذه النوعية من الطلبات، فالمخزون سيزداد تدريجياً خلال فصل الشتاء ولكن سيحتاج إليه خلال فصل الصيف.

الخصومات النقدية والكميات:

إذ يلجأ العديد من الموردين إلى تقديم أسعار خصم فى مقابل الطلبات الكبيرة، فالشراء بكميات كبيرة يمكن أن يقلل التكلفة بدرجة محسوسة. إلا أنه من قصور هذه المقولة أن يصاحب ذلك ارتفاع تكلفة التخزين، وكذلك ارتفاع التكلفة لفساد الناتج، والمخزون المتكسر ، والسرقة ، والتأمين، ... الخ. كما أن الاستثمار فى مخزون أكثر معناه استثمار أقل فى نواح أخرى.

تجنب نفاذ المخزون وقصوره:

فإذا تكرر نفاذ المخزون، فمن المحتمل تحول العملاء إلى مصادر أخرى لمقابلة احتياجاتهم، ففقد النية الحسنة قد يكون ثمنها غالياً لعدم وجود السلعة المطلوبة فى الوقت المناسب.

القرار المخزونى The Inventory Decision

هناك قراران عليك اتخاذهما عند التحكم فى المخزون ، ألا وهما:

1- الكم من المطلوب توريده

2- متى يجرى توريده واستلامه

ولقد ذكرنا فيما سبق مهام مراقبة المخزون، ولكن بزيادة مستويات المخزون ستزداد معه تكلفة تخزينه والاحتفاظ به، وهنا فعليك الوصول إلى الموازنة الدقيقة لإرساء مستويات المخزون. وهدف رئيسى لمراقبة المخزون يكمن فى تدنية التكاليف الكلية للمخزون. ومن أهم هذه التكاليف:

1- تكلفة المواد.

2- تكلفة أوامر التوريد.

3- تكلفة، التخزين أو الاحتفاظ بالمخزون

4- تكلفة مخزون الموازنة

5- تكلفة نفاذ المخزون.

وتفترض النماذج التى ستناقش فى هذا الباب أن الطلب والوقت الذى يتطلب لاستلامه معروف وثابت، وأنه لا توجد خصومات نقدية. فعند توافر هذه الفروض، فإن أهم التكاليف هى تكلفة إصدار أمر التوريد وتكلفة التخزين خلال فترة زمنية ، أنظر الجدول(6-1) لقائمة هذه العناصر والتى يهمنا تدنية مجموعها.

جدول (6-1) عناصر تكلفة المخزون

أ- أوامر المخزون	ب- الاحتفاظ بالمخزون
1- تطوير وإرسال أوامر الشراء	1- تكلفة رأس المال
2- المناولة والتفتيش على المخزون الوارد	2- الضرائب
3- سداد فاتورة الشراء	3- التأمين
4- بيانات بموقف المخزون	4- التلفيات
5- كهرباء ، غاز ، فاتورة التليفون... الخ من قسم المشتريات	5- السرقة
6- المرتبات والأجور للعاملين بقسم المشتريات	6- بضاعة راكدة(موديلات قديمة)
7- الأدوات المكتبية والأوراق المستندية الخاصة بقسم المشتريات	7- مرتبات وأجور العاملين بالمخزن
	8- كهرباء ، غاز ، ومبنى المخزن.
	9- الأدوات المكتبية والأوراق المستندية الخاصة بقسم المخازن

نماذج مراقبة المخزون

أولاً: ذات الطلب المحدد

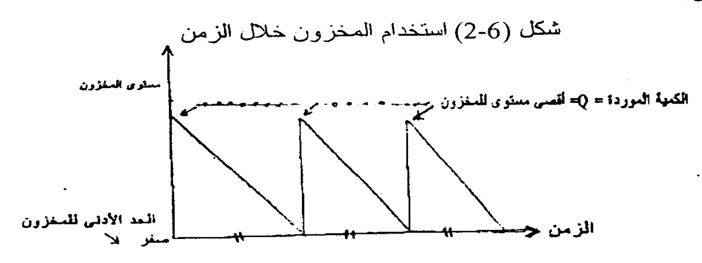
الكمية الاقتصادية المطلوب توريدها The Economic Order Quantity (EOQ)

ويقصد بذلك الكمية التى ستشترى، وهناك فروض فى النموذج الخاص بذلك وهى:

1- الطلب معروف وثابت.
2- الوقت المسبق، ويقصد به الوقت الذى يمر ما بين إصدار أمر التوريد ووصول الطلب يكون معروفاً وثابتاً.
3- استلام المخزون يكون لحظياً، بمعنى أن المخزون الذى يصل بناء على أمر التوريد – يكون فى عملية واحدة، فى نقطة زمنية موقوتة وليس فترة زمنية.
4- غير ممكن وجود كميات ذات خصومات نقدية.
5- أن التكاليف المتغيرة الوحيدة هى تكلفة إصدار أمر التوريد، تكلفة التوريد، وتكلفة التخزين خلال فترة زمنية (تكلفة الاحتفاظ به).
6- إذا صدرت أوامر التوريد فى الوقت المناسب، فإنه يمكن كلية تفادى نفاذ المخزون أو قصوره.

وبهذه الفروض فإن استخدام المخزون سيكون له شكل كأسنان المنشار كما فى الشكل رقم (6-2). وفيه يتبين أن مستوى كمية المخزون سيقفز من صفر إلى رقم كمية التوريد عند وصوله، ونظراً لأن الطلب يكون ثابتاً خلال الزمن، فإن المخزون يسقط بمعدل ثابت uniform خلال الزمن، ويصدر أمر توريد آخر بحيث أنه عندما يصل مستوى المخزون إلى الصفر يكون أمر التوريد الجديد قد وصل وأن مستوى كمية المخزون يقفز إلى رقم كمية الوحدات الموردة ممثلة بالخطوط الرأسية. وتستمر هذه العملية إلى ما لانهاية خلال الزمن.

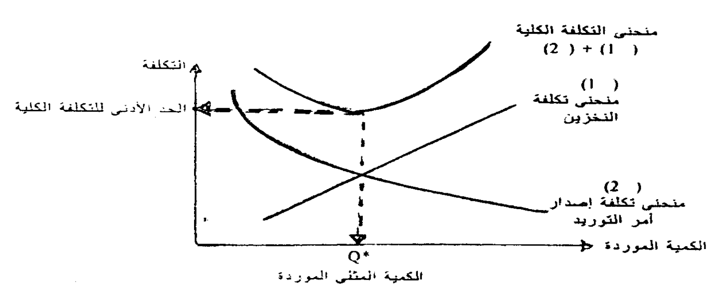
شكل (6-2) استخدام المخزون خلال الزمن



تكاليف المخزون

إن الهدف من معظم نماذج المخزون هو تدنية التكاليف الكلية، ومع الأخذ فى الاعتبار للفروض المذكورة سابقاً فإن أهم تكاليف هى تكلفة إصدار أمر التوريد وتكلفة التخزين خلال فترة زمنية، وأن التكاليف الأخرى مثل تكلفة المخزون نفسه هى تكلفة ثابتة. فإذا نظرنا إلى الشكل رقم (6-3) نجد أن التكاليف الكلية هى دالة للكمية المورَّدة Q، وأن الحجم الأمثل للتوريد Q^* هو الكمية التى تدنى التكلفة الكلية، وبزيادة الكمية المورَّدة فإن إجمالى عدد أوامر التوريد سنوياً يتناقص، ولكن بزيادة كمية التوريد فإن تكلفة التخزين تتزايد لكبر حجم متوسط المخزون الذى يستلزم على المؤسسة أن تحافظ عليه.

شكل (6-3) التكلفة الكلية كدالة للكمية المورَّدة



وتتواجد الكمية المثلى المورَّدة عند تلاقى وتساوى تكلفة إصدار أمر التوريد مع تكلفة التخزين.

وفى تقدير التكلفة السنوية للتخزين فيستخدم متوسط مستوى التخزين المتاح حالياً، ثم يضرب هذا المتوسط فى معامل يسمى تكلفة المخزون للوحدة \ سنة، ويوضح الجدول (6-2) كيفية حساب متوسط المخزون. ومن الأهمية أن يذكر أن متوسط مستوى المخزون فى هذه المشكلة يساوى نصف المستوى الأقصى (10) (وهذا راجع إلى ثبات الطلب، مصاحباً للحقيقة التى فيها نهاية المخزون يساوى صفراً)، وهذا المستوى الأقصى يساوى الكمية المورَّدة. وببساطة فإن متوسط عدد وحدات المخزون يحسب كنصف الكمية المورَّدة.

$\frac{Q}{2}$ = متوسط مستوى المخزون ....(1)

تقدير الكمية الإقتصادية المطلوب توريدها EOQ

للوصول إلى الكمية المثلى السابق تحديدها بيانيا عن طريق التعبير عن ذلك بمعادلات، حيث يجرى:

1- إيجاد تعبير عن تكلفة إصدار أمر التوريد
2- إيجاد تعبير عن تكلفة التخزين
3- مساواة التكلفتين السابقتين
4- حل المعادلة السابقة لإيجاد الكمية المثلى

جدول (6-2) حساب متوسط المخزون

اليوم	مستوى المخزون		
	بداية	نهاية	متوسط
أول مايو (استلام أمر التوريد)	10	8	9
2 مايو	8	6	7
3 مايو	6	4	5
4 مايو	4	2	3
5 مايو	2	0	1

أعلى مستوى أول مايو = 10 وحدات
إجمالى المتوسطات اليومية = 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25
عدد الأيام = 5 أيام
متوسط مستوى المخزون = 25 ÷ 5 = 5 وحدات

وباستخدام المتغيرات التالية نستطيع تقدير التكاليف المشار إليها والكمية الاقتصادية *Q لأمر التوريد:

Q = عدد الوحدات لكل أمر توريد.
Q^* = الكمية المثلى من الوحدات لكل أمر توريد
D = الطلب السنوى من الوحدات لعنصر المخزون
C_o = تكلفة إصدار أمر التوريد لكل أمر توريد
C_h = تكلفة التخزين للوحدة فى السنة

وبناء على ما سبق فإن:

1- تكلفة أمر التوريد\ سنوياً = (عدد أوامر التوريد \ سنة) × (تكلفة أمر التوريد \ أمر توريد)

(Annual Ordering Cost)

$$= \frac{\text{الطلب السنوى}}{\text{عدد الوحدات \ أمر توريد}} \times \text{(تكلفة أمر التوريد \ أمر توريد)}$$

$$= C_o \times \frac{D}{Q}$$

2- تكلفة التخزين السنوية = متوسط مستوى المخزون × (تكلفة التخزين \ الوحدة \ السنة)

(Annual holding or carryng cost)

$$= \frac{\text{كمية أمر التوريد}}{2} \times \text{(تكلفة التخزين \ الوحدة \ السنة)}$$

$$= C_h \times \frac{Q}{2}$$

3- الكمية المثلى لأمر التوريد عندما تتساوى التكلفتان:

(Optimal quantity for ordering)

$$\frac{D}{Q}C_o = \frac{Q}{2}C_h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

4- الحل لتقدير Q^* هو :

$$Q = Q^* = \sqrt{\frac{2DCo}{C_h}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

تكلفة شراء عنصر المخزون:

أحياناً يُعبَّرعن التكلفة الكلية للمخزون بأن تتضمن التكلفة الفعلية للمادة المشتراه، ولا تعتمد تكلفة الشراء على الكمية المثلى، حيث ما زالت تكلفة الشراء السنوية تتكون من (D) x (P) حيث (p) هى ثمن الوحدة، (D) هو الطلب السنوى من وحدات المخزون. ولحساب متوسط مستوى المخزون معبراً عنه بوحدات من الجنيه حينما يُعطى ثمن الوحدة، فيجرى الآتى:

$$\text{متوسط مستوى المخزون} = \frac{PQ}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وهذه المعالة تتماثل مع المعادلة (1) .

ويُعبّر عادة عن تكاليف المخزون فى صورة نسبة مئوية من ثمن الوحدة، وهنا يدخل متغير جديد I معبراً عن التكلفة السنوية للتخزين كنسبة من السعر ، أى أن $C_h = IP$ ويكون :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_o}{Ip}}$$

تحديد نقطة إعادة إصدار أمر التوريد Reorder Point (ROP)

لقد أفترض فى أبسط نماذج المخزون أن استلام أمر التوريد هو لحظى، بمعنى افتراض انتظار المؤسسة حتى يصل مستوى مخزونها لعنصر معين – صفراً ، لتقوم بإصدار أمر التوريد واستلامه وإضافته لرصيدها فى الحال.

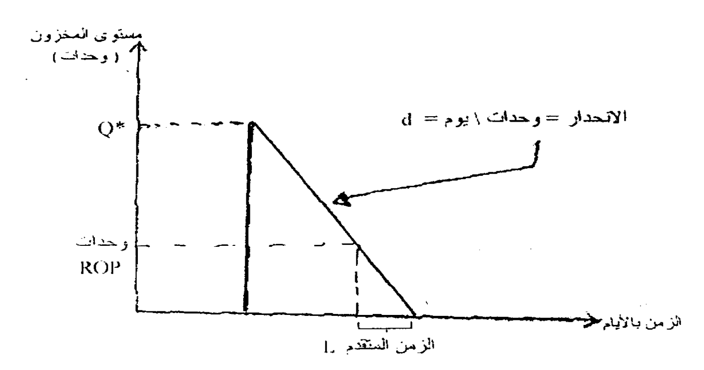
ولكننا نعرف أن هناك زمنا بين إصدار واستلام أمر التوريد يسمّى وقت التسليم أو الوقت المتقدم lead Time ، وهو غالباً عدة أيام أو عدة أسابيع . ويقدر ROP كالآتى:

$$\text{ROP} = (\text{الطلب \ يوم}) \times (\text{الوقت المتقدم لطلب جديد بالأيام}) \qquad (5)$$

$$= L \times d$$

ويبين الشكل (6-4) ROP بيانيا، وخط الانحدار ما هو إلا الاستخدام اليومى للمخزون، ويعبر عن ذلك بوحدات مطلوبة \ يوم : (d) وأن الوقت المتقدم L ، هو الوقت الذى يمر حتى يُستلم المورد. فإذا صدر أمر توريد عندما يصل المخزون إلى مستوى ROP فإن المخزون الجديد يصل فى نفس اللحظة التى يكون فيها المخزون عند مستوى الصفر.

شكل (6-4) منحنى نقطة إعادة إصدار أمر التوريد



فمثلاً إذا كان الطلب السنوى على وحدات ترانسستور شركة دلتا هو 8000 ، فإنه فى ظل أيام العمل الأمريكية يكون الطلب اليومى عليها هو 40 وحدة ، وكان متوسط وقت تسليم أمر التوريد هو ثلاثة أيام عمل ، فإن ROP تحسب كالآتى:

ROP = d x L

= 40 وحدة \ يوم × 3

= 120 وحدة

أى حينما يصل مستوى المخزون إلى 120 وحدة فيجب أن يصدر أمر توريد، وسيصل الأمر بعد ثلاثة أيام يكون خلاله مستوى المخزون فى المؤسسة قد أستنفد إلى الصفر.

نظام مراقبة المخزون ذى الفترة الثابتة

لقد ناقشنا سابقاً الوصول إلى تقدير كمية أمر التوريد الاقتصادية التى تحدد كم التوريد، ونظراً لأنه ينتج عن هذا المدخل عددثابت لكمية أمر التوريد فقد سمى بنظام الأمر الثابت.

وهناك مدخل آخر لتقدير عدد ثابت، الذى يجيب على السؤال " متى يصدر أمر التوريد" وهذا يسمى نظام مراقبة المخزون ذى الفترة الثابتة. ولوجود العديد من الكميات التى تحسب لهذا النوع من النظام فأكثرها شيوعاً هو تقدير العدد الأمثل من التوريدات \ سنة (Y*)، والعدد الأمثل من الأيام التى بين أوامر التوريد (N*) أو الإمداد. وكما سيرى فهذه الكميات تنتج إجابة مطابقة لمشكلة مراقبة المخزون، وببساطة فإنه ينظر إلى نفس المشكلة من زاوية مختلفة.

تقدير العدد الأمثل من أوامر التوريد سنوياً ، (Y*)

فتقدير y* يدلنا على عدد المرات فى السنة التى تصدر خلالها أوامر التوريد. فإذا كان الطلب السنوى هو 100 وكمية التوريد الاقتصادية هى 50 وحدة \ توريد فإن Y * = 2 مرة سنوياً أمر توريد به 50 وحدة لكل، لمقابلة الطلب السنوى المذكور.

$$y^* = \frac{D}{Q^*} \quad \text{.......................................(6)}$$

ومن العلاقات السابقة فإن :

$$y^* = \frac{D}{\sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}} = \sqrt{\frac{DC_h}{2C_o}} \quad \text{......(7)}$$

تقدير العدد الأمثل من الأيام ، التى بين أوامر التوريد (N^*)

ويدلنا هذا التقدير على عدد الأيام التى يمكن خلالها إجراء الأعمال بعد استلام أمر التوريد بدون استنفاد المخزون. فإذا كان العدد الأمثل من أوامر التوريد سنوياً هو 5 فما هو عدد الأيام بين أمرى توريد؟ وبمعنى آخر عدد أيام الإمداد لكل أمر توريد. عندنا 365 يوم فى السنة و 5 أوامر توريد سنويا، فكل أمر توريد سيغطى 73 يوما (365÷ 5) وهذه العلاقة تظهرها المعادلة التالية:

$$N^* = \frac{365}{y^*}$$

ومن المعادلة (7) يمكن حساب (N^*) بدون تقدير (y^*) سلفاً ، كالآتى :

$$N^* = \frac{365}{\sqrt{\frac{Dc_h}{2C_o}}} = \sqrt{\frac{266.45C_o}{DC_h}}$$

تحليل الحساسية

فى تقديراتنا السابقة لـ Q^* , N^* , y^* أفترض فى المعادلات أن كل قيم المدخلات كانت معروفة بدرجة مؤكدة. والسؤال ماذا سيحدث إذا تغيرت قيمة أحد هذه المدخلات، ولنفترض مثلاً زيادة تكلفة إصدار أمر التوريد بمبلغ 5 جنيهات، وهذا معناه أن الكمية المثلى ستتغير. فتقدير هذا التأثير يسمى بتحليل الحساسية، وفى نفس الوقت فليس من الضرورى إعادة حسابات تقدير Q^* .

فإذا نظرنا إلى المعادلة التى تقدر عدد الوحدات المثلى لأمر التوريد، فإن تأثير كل من المتغيرات التالية فردياً على قيمة Q^* يكون كالآتى:

1- زيادة تكلفة أمر التوريد بمعامل قدره 4 . (مثلاً من 10 إلى 40).
2- زيادة تكلفة التخزين بمعامل قدره 4.
3- تقلص الطلب الكلى السنوى بمعامل قدره 9

فالمعادلة الأصلية

$$\text{EOQ for } Q^* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

(أ) فلمعرفة تأثير الأولى أى زيادة C_o بمعامل 4 يكون كالآتى :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(4)(C_O)}{C_h}} = 2\sqrt{\frac{2DC_O}{C_h}} = 2\times$$ (الكمية المثلى الاقتصادية السابقة)

(ب) ولمعرفة تأثير الحالة الثانية أى زيادة C_h بمعامل 4 يكون كالآتى :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(C_O)}{4C_h}} = 1/2\sqrt{\frac{2DC_O}{C_h}} = 1/2\times$$ (الكمية المثلى الاقتصادية السابقة)

(جـ) ولمعرفة تأثير الحالة الثالثة أى تقلص حجم الطلب السنوى بمعامل قدره 9 يكون كالآتى:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(1/9)DC_o}{C_h}} = 1/3\sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = 1/3\times$$ (الكمية المثلى الاقتصادية السابقة)

*

نماذج مراقبة المخزون

ثانياً : حجم اللوط من الإنتاج الإقتصادى

Economic Production Lot Size Model

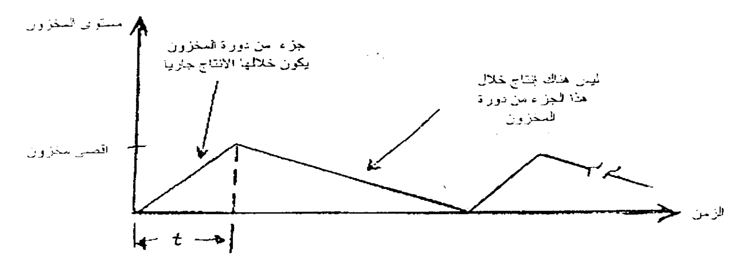
مـقـدمـة

تعرضنا أولاً إلى أسس مراقبة المخزون تحت ظل من الفروض التى غالباً لا تحتيق. فعلى سبيل المثال، فى بعض العمليات الإنتاجية يتزايد المخزون بمرور الوقت بدلاً من استلام الأمر لحظياً instantaneously received ، بالإضافة إلى الخصومات النقدية عندما تشترى الإمدادات بكميات كبيرة وأحياناً لا يمكن تجنب قصور أو نفاد الرصيد المخزونى لعدم معرفة كمية الطلب أو ثباته . وفى هذا الفصل سنبحث كيفية استخدام الكمية الاقتصادية المطلوب توريدها EOQ فى العملية الإنتاجية.

الكمية الاقتصادية الموردة بدون الاستلام التلقائى للمخزون

ويطبق هذا النموذج عند تدفق المخزون باستمرار أو تزايده بمرور الوقت بعد صدور أمر التوريد. أو عندما تنتج الوحدات وتباع فى نفس الوقت . فتحت هذه الظروف فإن معدل الطلب اليومى يجب أن يؤخذ فى الحسبان ، ويبين الشكل (6-5) مستويات المخزون كدالة فى الزمن ، ولأن هذا النموذج مخصص للبيئة الإنتاجية، فيعرف بما يسمى نموذج الإنتاج الجارى production run model. فبدلاً من حساب تكلفة أمر التوريد ستكون هناك تكلفة تجهيز للعملية الإنتاجية Setup cost وذلك لأجل تصنيع الناتج المرغوب. وهذه التكلفة عادة ما تتضمن مرتبات وأجور العاملين المسئولين عن تلك الآلات والتكاليف الهندسية والتصميمية. والأوراق ، والمنافع العامة.. الخ . وتتكون تكاليف التخزين من نفس العوامل السابق ذكرها عند تقدير نموذج EOQ ولو أن معادلة تكلفة التخزين السنوية تتغير.

شكل (6-5) مراقبة المخزون والعملية الإنتاجية



ويشتق نموذج الإنتاج المطلوب من مساواة تكلفة التجهيز مع تكلفة التخزين، وتقدير قيمة المتغير المناسب. هذا مع العلم بأن تلك المساواة لا تضمن الحلول المثلى لنماذج أكثر تعقيداً من نموذج الإنتاج المطلوب.

تقدير التكلفة التخزينية السنوية Annual caryíng cost

باستخدام المتغيرات التالية نستطيع تقدير تلك التكلفة:

Q = عدد القطع بكل أمر توريد

C_h = تكلفة تخزين القطعة سنوياً

p = معدل الناتج اليومى

d = معدل الطلب اليومى

t = طول الدورة الإنتاجية بالأيام

1- ∵ تكلفة التخزين السنوية = **متوسط مستوى المخزون × (تكلفة تخزين الوحدة سنوياً)**

= **متوسط مستوى المخزون ×** C_h

2- ومتوسط مستوى المخزون = 2\1 **(أقصى مستوى للمخزون)**

3- وأقصى مستوى للمخزون = **كل الإنتاج خلال الإنتاج الجارى – كل الإنتاج المستخدم خلال الإنتاج الجارى.**

ولكن Q= كل الإنتاج = pt أى أن $\frac{Q}{p} = t$

ولذلك فأقصى مستوى للمخزون $= d\left(\frac{Q}{p}\right) - p\left(\frac{Q}{P}\right)$

$$= Q\left(\frac{Q}{P}\right) - Q$$

$$= \left(\frac{d}{p} - 1\right)Q$$

4 - ∴ تكلفة التخزين السنوية = 2 \ 1 **(أقصى مستوى للمخزون) ×** C_h

$$= C_h \times \left(\frac{d}{p} - 1\right)Q \times 2\backslash 1$$

تقدير تكلفة أمر التوريد

Annual Ordering Cost or Annual Setup Cost

عندما ينتج ناتج خلال فترة زمنية فإن تكلفة تجهيز العملية الإنتاجية تحل محل تكلفة أمر التوريد.
وسنعرض فيما يلي كيفية تقديرها .

1- تكلفة تجهيز العملية الإنتاجية = (عدد مرات التجهيز فى السنة) × (تكلفة التجهيز)

$$= C_s \cdot \frac{D}{Q_p}$$

حيث D = الطلب السنوى معبراً عنه بوحدات

Q_p= الكمية المنتجة فى كل تجهيزة

C_s = تكلفة التجهيز

2- تكلفة أمر التوريد $= \frac{D}{Q}C_O$

تقدير الكمية المثلى لأمر التوريد ، والكمية المثلى للإنتاج

بهذا النموذج يمكننا تقدير الكمية المثلى بمساواة تكلفة التوريد مع تكلفة التخزين وذلك عند إجراء أمر توريد المخزون.

1 - تكلفة أمر التوريد $= \frac{D}{Q}C_O$

2- تكلفة التخزين $= 1/2C_h.Q\left(1-\frac{d}{p}\right)$

3 - مساواة التكلفتين $= \frac{D}{Q}C_O = 1/2C_hQ(1-\frac{d}{p})$

4- تقدير Q^*:

$$Q^2 = \frac{2DC_O}{C_h\left(1-\frac{d}{p}\right)}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_O}{C_h(1-\frac{d}{p})}}$$

$$Q_p^* = \sqrt{\frac{2DCs}{C_h(1-\frac{d}{p})}}$$

مثال :

تقوم شركة القاهرة للمصنوعات بإنتاج وحدات تبريد تجارية فى لوطات، وكان تقدير الشركة للطلب فى هذا العام هو 10.000 وحدة ، وتتكلف عملية التجهيز التصنيعية 100 جنيه ، وأن تكلفة التخزين السنوية للوحدة هى 50 قرشاً ، وبمجرد دوران العملية الإنتاجية فإنه يمكن إنتاج 80 وحدة تبريد يومياً. وقد كان الطلب خلال الفترة الإنتاجية 60 وحدة يوميا، فكم عدد وحدات التبريد التى يجب إنتاجها فى كل لوط؟ وكم سيمتد الجزء الإنتاجى من الدورة المبين فى الشكل (6-5)؟

الحل :

الطلب السنوى	$D = 10.000$ وحدة
تكلفة تجهيز العملية الإنتاجية	$C_s = 100$ جنيه
تكلفة التخزين	$C_h = 50$ قرشا للوحدة سنويا
معدل الإنتاج اليومى	$p = 80$ وحدة يومياً.
معدل الطلب اليومى	$d = 60$ وحدة يوميا

∴ **الكمية المثلى =**

$$Q_p^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{C_h(1-\frac{d}{p})}} \quad = \sqrt{\frac{2\times 10.000\times 100}{0.5\left(1-\frac{60}{80}\right)}}$$

$$= \sqrt{16.000.000} = 4.000$$ وحدة لكل طلب توريد

فإذا كانت $Q_p^* = 4000$ وحدة ونعرف أنه يمكن إنتاج 80 وحدة يوميا ، فإن طول الدورة الإنتاجية سيكون $\frac{Q}{p} = \frac{4000}{80} = 50$ يوماً. أى أن الشركة تقرر إنتاج وحدات التبريد ، وأن الأجهزة ستكون معدة لإنتاج الوحدات خلال فترة زمنية قدرها 50 يوماً.

*

نماذج مراقبة المخزون

ثالثاً : القصور المخطط في كمية المخزون

Planned shortage in Inventories

مقدمة

في نماذج المخزون السابقة لم تسمح بوجود قصور أو نفاد في كمية المخزون لمقابلة احتياجات الطلب الجاري، إلا أنه توجد حالات عديدة يقترح فيها وجود هذا القصور المخطط وهذا الوضع نجده في السلع ذات تكلفة المخزون العالية مثل السيارات ، والأدوات المنزلية كالثلاجات والغسالات، أي السلع ذات القيمة السعرية العالية جداً، إذ أنه من الشائع عدم وجود مخزون مما يطلب من موديل معين عند وكلاء بيع السيارات ، ولكن يكون الوكيل على استعداد لإصدار أمر توريده إذا أمكنك الانتظار.

وفي النموذج التالي ، يسمح بوجود نفاد المخزون وأوامر التوريد الخلفية back order ويسمى النموذج للمخزون ، قصور مخطط له Planned Shortage أو back order . ويفترض النموذج أن عملية البيع لن تلغى لنفاد المخزون ، كما أن أوامر التوريد الخاصة سيتم تنفيذها قبل وجود طلب جديد على الناتج. وفيما يلي المتغيرات لهذا النموذج:

Q = كمية الوحدات لكل أمر توريد

D = الطلب السنوي معبراً عنه بوحدات

C_h = تكلفة التخزين للوحدة سنوياً

C_o = تكلفة أمر التوريد لكل طلب

C_b = تكلفة أمر التوريد الخاص لكل وحدة في العام

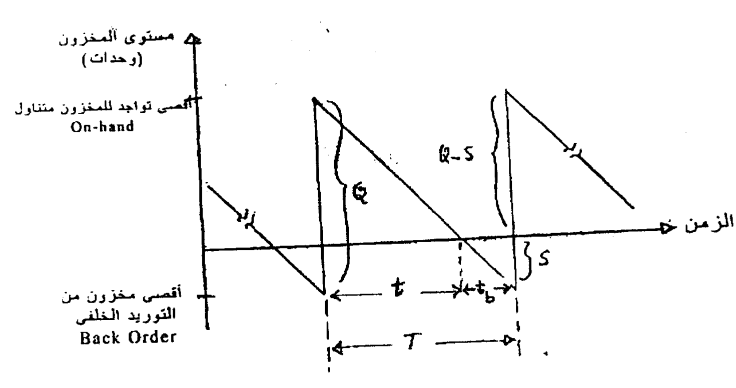
S = كمية أمر التوريد الخلفي

$(Q-S)$= الوحدات المتبقية بعد تلبية أمر التوريد الخلفي

وتندمج تكاليف أمر التوريد العادي في تكلفة أمر التوريد الخلفي ، بالإضافة إلى وجود تكلفة تعبر عن عدم رضاء العميل أو فقدان الرغبة في الشراء . فعلى سبيل المثال ، من غير المحتمل مواظبة العملاء على الشراء من المتعهد الذي لا تتوافر لديه بانتظام كمية من المخزون ودوام أوامر التوريد الخلفية ، لذلك فتكلفة أمر التوريد الخلفي تعكس عامل عدم راحة العميل. ولما كان أمر التوريد الخلفي يعتمد على طول انتظار العميل فهو يتماثل مع تكلفة التخزين ويعبر عنه بالجنيهات للوحدة سنوياً. والسماح لأوامر التوريد الخاصة يغير من منحنى استخدام المخزون كما يتضح من الشكل (6-6).

شكل (6- 6) استخدام المخزون مع أمر التوريد الخلفى

Inventory Usage with Back Ordering



تقدير مستويات التوريد الأمثل ، أمر التوريد الخلفى

بافتراض تواجد البيانات الخاصة بتلك التغيرات ، فسيجرى **تقدير الكمية المثلى لأمر** التوريد *Q، **والرقم الأمثل للوحدات** ذات أمر التوريد الخلفى *S. **ويختلف التقدير هنا عما سبق لوجود تكلفة فى معادلة التكلفة الكلية** السنوية.

التكلفة الكلية TC = تكلفة أمر التوريد + تكلفة المخزون + **تكلفة أمر التوريد الخلفى**

فتكلفة أمر التوريد هى ما سبق تقديرها فى أولا من هذا الباب ، وهى:

تكلفة أمر التوريد = $\frac{D}{Q}C_o$

وتكلفة المخزون = متوسط مستوى المخزون × **تكلفة مخزون الوحدة سنويا**

= متوسط مستوى المخزون × (C_h)

ويحسب متوسط مستوى المخزون فى حالتنا الجديدة ليكون $\frac{(Q-S)}{2}$ ، **ولكن هذا المتوسط** لمستوى **المخزون هو** للفترة التى ما زال فيها مخزون ، t ، وليس لكل الوقت الاجمالى T ، **وهذا يتضح** من الشكل **(6-6)**.

t = الوقت ما بين استلام أمر التوريد وهبوط مستوى المخزون إلى د

t_b = الوقت الذى خلاله سيحدث أمر توريد خلفى أو نفاذ الرصيد المخزونى

T = الوقت الكلى .... $T = t + t_b$

ويكون متوسط المخزون خلال الوقت الكلى ، كمتوسط مرجح.

$$\text{متوسط مستوى المخزون} = \frac{(\text{متوسط المستوى خلال الفترة } t)\, t + (\text{متوسط المستوى خلال الفترة } t_b)\, t_b}{T}$$

$$= \frac{t_b\, zero + \left(\frac{Q-S}{2}\right)t}{T} = \frac{\left(\frac{Q-S}{2}\right)t}{T}$$

ولما كان لا يوجد مخزون خلال t_b فالمتوسط هو صفر.

ولحساب الكميات المثلى من S , Q فسيجرى التعبير عن T , t فى صورة S , Q ، وحيث نعلم أن (Q-S) هى أقصى كمية مخزون.

$$\text{الفترة الزمنية بالأيام} = \frac{\text{اجمالى الوحدات خلال الفترة الزمنية}}{\text{الطلب اليومى الثابت (وحدات)}}$$

$$t = \frac{(Q-S)}{d} \text{ يوم}$$

وفيها تستنفد أقصى كمية للمخزون (Q-S) فى فترة $\frac{(Q-S)}{d}$ يوم.

ولما كانت وحدات Q يجرى طلب أمر توريدها وشحنها فى كل دورة ، فتستطيع معرفة طول الدورة

$$T = \frac{Q}{d}$$

وباستخدام المعادلتين الأخيرتين فى التعبير عن متوسط المخزون، فيكون الآتى:

$$\text{متوسط مستوى المخزون} = \frac{\left(\frac{Q-S}{2}\right)t}{T}$$

$$= \frac{\left(\frac{Q-S}{d}\right)\left(\frac{Q-S}{2}\right)}{\frac{Q}{d}} = \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

تكلفة المخزون = (متوسط مستوى المخزون) × C_h

$$= C_h \times \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

أى أن متوسط مستوى المخزون يتوقف على قرارين ، الكمية المطلوب توريدها Q ، وكذلك أقصى عدد من أوامر التوريد الخلفية.

ويتأتى تقدير عدد طلبات أمر التوريد السنوية فى هذا النموذج كما سبق فى نموذج تقدير EOQ . وكما نعرف (D) بأنها تمثل الطلب السنوى ، فيكون:

ويجرى حساب تكلفة أمر عدد طلبات أوامر التوريد الثانوية = $\frac{D}{Q}$

ويجرى حساب تكلفة أمر التوريد الخلفى بنفس الطريقة لحساب تكلفة المخزون.

متوسط عدد الوحدات فى أمر التوريد الخلفى = $\frac{\left(\frac{S}{2}\right)t_b + Zero \times t}{T}$

$$= \frac{\left(\frac{S}{2}\right)t_b}{T}$$

ثم نعبر عن T, t_b كدالة فى S, Q . ولما كان أقصى عدد من طلبات أمر التوريد الخلفى تصل إلى الكمية S بمعدل يومى d فإن:

$$t_b = \frac{S}{d}$$

وبذلك يكون:

متوسط عدد الوحدات فى الطلب الخلفى = $\frac{\left(\frac{S}{d}\right)\left(\frac{S}{2}\right)}{\frac{Q}{d}} = \frac{S^2}{2Q}$

تكلفة أمر التوريد الخلفى = (متوسط عدد الوحدات فى الطلب الخلفى) C_b

$$= C_b \cdot \frac{S^2}{2Q}$$

حيث C_b = تكلفة المحافظة على وحدة واحدة من أمر التوريد الخلفى لمدة عام. وتكون التكلفة الكلية السنوية TC لنموذج المخزون ذو أمر التوريد الخلفى كالآتى:

$$TC = \text{Ordering Cost} + \text{Carrying Cost} + \text{Back ordering Cost}$$

$$= \frac{D}{Q}C_o + \frac{(Q-S)^2}{2Q}c_h + \frac{S^2}{2Q}C_b$$

وتقدر القيم المثلى لكمية أمر التوريد *Q، والوحدات المطلوبة على أمر التوريد الخلفى *S ، عن طريق التفاضل للمعادلة السابقة ، وتظهر نتائجها كالآتى:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}\left(\frac{C_h + C_b}{C_b}\right)}$$

$$S^* = Q^*\left(\frac{c_h}{C_h + C_b}\right)$$

مثال:

تحاول شركة كلارا لمعروضاتها من الملابس النسائية ، تحديد كم الملابس اللازم طلبها لمجموعتها الشتوية. ولأن عدد الموديلات والأحجام كبير جداً ، فقد تقرر استخدام القصور المخطط planned shortage. وبينما العملاء غير راضين عن هذا القصور، فإن أوامر التوريد الخلفى تعتبر من التعامل الشائع نظراً لأن الشركة تتمتع بصفة طيبة وأن موديلاتها جميلة. وحتى الآن، لم يلغ أحد أمر توريد بسبب التأخير. فالطلب على ملبس معين يقدر بـ 10.000 وحدة ، وتكلفة التخزين للملبس الواحد هو 2 جنيه سنوياً ، وأن تكلفة إصدار أمر توريد هو 7.5 جنيه، وتقدر الشركة أن تكلفة أمر التوريد الخلفى هى 10 جنيهات لكل ملبس فى السنة. فكم عدد الملابس التى يصدر أمر توريدها؟ وكم عدد الملابس التى ستورد خلفياً لكل دورة مخزون؟

D = 10.000 ملبس

C_h = 2 جنيه

C_o = 7.5 جنيه

C_b = 10 جنيهات

$$Q^* = \sqrt{\frac{(2)(10.000)(7.5)}{2}\left(\frac{2+10}{10}\right)}$$

= 300 ملبس لكل طلب توريد

$$S^* = Q^*\left(\frac{C_h}{C_h + C_b}\right)$$

$$= 300\left(\frac{2}{2+10}\right) = 50$$ ملبس لكل توريد خلفى

وإذا طبق الحل فإن المنظومة ستعمل كالآتى:

الحد الأقصى للمخزون $(Q\text{-}S) = 300 - 50 = 250$ ملبس

دورة المخزون $= T = \frac{Q}{D}(365) = \frac{300}{10.000}(365) = 11$ يوم

والتكلفة الكلية السنوية كالآتى (مستبعداً منها تكلفة الملابس):

تكلفة إصدار توريد $= (7.50)\frac{10.000}{300} = 250$ جنيه

تكلفة تخزين $= (2)\frac{2(250)}{300\times 2} = 208$ جنيه

تكلفة التوريد الخلفى $= (10)\frac{2(50)}{300\times 2} = 41.7$ جنيه

449.7 جنيه

فإذا رأت الشركة عدم استخدام التوريد الخلفى واتبعت نظام نموذج EOQ العادى ، فإن قرار المخزون الموصى عليه يكون:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(10.000)(7.5)}{2}} = 284$$ ملبس لكل طلب

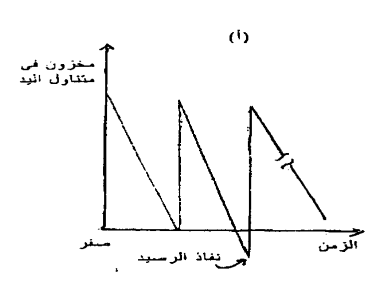
وتلك كمية التوريد نتج عنها تكلفة تخزين 284 جنيها وتكلفة إصدار أمر توريد قدرها 264 جنيها لذلك ففى هذا المثال ، فالسماح للتوريد الخلفى يترتب عليه 548 – 449.7 جنيه = 48.3 جنيه أو 9.7% توفيرا فى التكلفة عن نموذج عدم نفاذ كمية المخزون EOQ .

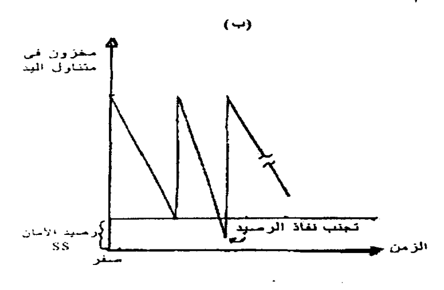
وهذه المقارنة والنتائج أساسها افتراض أن نموذج التوريد الخلفى (لا فقدان فى المبيعات)، ذى تكلفة سنوية للوحدة ذات التوريد الخلفى قدرها 10 جنيهات ، وهو نموذج صحيح للموقف الحقيقى للمخزون. فإذا كانت الشركة لديها مخاوف قوية من أن نفاد المخزون يقود إلى فقدان للمبيعات ، فحينئذ نجد أن التوفير المذكور لن يعود كافياً للتحول إلى السياسة التخزينية التى تسمح بالقصور المخطط المخزونى.

رابعاً: استخدام رصيد الأمان Safety Stock (ss)

ينبنى نظام التوريد الخلفى على أساس أن العميل ينتظر بفارغ الصبر حتى يجاب طلبه وأنه مؤكد. وحينما تعتقد الإدارة أن هذه الفروض غير قائمة فإنها قد تلجأ إلى استخدام رصيد الأمان، وهو رصيد اضافى يكون فى متناول اليد زيادة عن المخزون الأصلى خلال العام. فالغرض الرئيسى منه هو تجنب نفاد الأرصدة المخزونة حينما يكون الطلب أعلى مما كان متوقعاً، وتظهر فائدته فى الشكل (6-7).

شكل (6-7) استخدام رصيد الأمان





هذا وبالرغم من أن نفاد الرصيد يمكن تجنبه فى معظم الأحيان إلا أنه ما زال هناك فرصة لحدوثه، وذلك فى حالة زيادة الطلب بدرجة كبيرة يستنفد معها رصيد الأمان وحدوث نفاد للرصيد.

ومن أحسن الوسائل للمحافظة على مستوى رصيد الأمان هو إستخدام ROP، وذلك بإضافة عدد من وحدات رصيد الأمان كنقطة تنظيمية buffer إلى نقطة إعادة إصدار أمر التوريد ROP .

$$ROP = d \times L + ss$$

رصيد الأمان + (الوقت المتقدم لطلب جديد بالأيام) × (الطلب \ يوم) =

ويبقى السؤال ،كيفية تحديد كمية رصيد الأمان ؟ فإذا توافرت بيانات عن التكلفة ، فالهدف هو تدنية التكلفة الكلية، فإذا لم تتوافر فمن الضرورى إيجاد مستوى من الخدمة أو سياسة لها. ويقصد بمستوى الخدمة عدد مرات نفاذ الرصيد التى يسمح بها سنوياً.

رصيد الأمان مع العلم بتكاليف نفاذ الرصيد

عندما كانت الكمية الاقتصادية المطلوب توريدها EOQ ثابتة واستخدم فيها ROP ، فإن الوقت الوحيد الذى يمكن فيه حدوث نفاد للرصيد هو خلال الوقت المتقدم Lead time.

وكما نعرف فإن الوقت المتقدم هو الوقت الذى ينقضى بين موعد إصدار واستلام أمر التوريد، لذلك فمن الضرورى معرفة احتمال الطلب خلال الوقت المتقدم وتكلفة نفاد الرصيد. وفى هذا الجزء ستستخدم الدالة الاحتمالية غير المتصلة لنصف هذه الحالة ، ولكن هذا المدخل يمكن تعديله حينما يتبع الطلب دالة احتمالية متصلة.

وهنا سنستخدم تكلفة الوحدة من الرصيد النافد Stockout Cost . وتتضمن هذه التكلفة عدة عناصر فى ظل الفروض الآتية:

1- إذا حدث نفاد للرصيد فإنه يفقد إلى الأبد هذا البيع بالذات، فإذا كان هناك ربحا حديا قدره 10 قروش للوحدة فيجب أن تتضمن التكلفة هذه القيمة.

2- إذا خسرنا بعض العملاء لنفاد الرصيد، وبالتالى فقدان أعمالهم لمدى الحياة، فهذه التكلفة يجب أيضا أن تتضمن.

وعموماً فتكاليف نفاد الرصيد يجب أن تشمل النتائج المباشرة والغير مباشرة لنفاد الرصيد. فبمعرفتنا لدالة الطلب وتكلفة نفاد الرصيد فيصبح من الممكن تحديد أحسن مستوى لرصيد الأمان وهو الذى يدنى التكلفة الكلية.

مثال

قررت شركة النجوم أن نقطة إعادة إصدار أمر التوريد ROP هى 50 : (L x d) وحدة،وكانت تكلفة التخزين السنوى للوحدة 5 جنيهات، وتكلفة نفاد الرصيد هى 40 جنيها لأمر التوريد . وقد أظهرت خبرة الشركة التوزيع الاحتمالى للطلب المخزونى خلال فترة ROP ، كما يبينها الجدول (6-3).

جدول (6-3) احتمالات الطلب لشركة النجوم

عدد الوحدات	الاحتمال
30	0.2
40	0.2
ROP ← 50	0.3
60	0.2
70	0.1
	1.0

وكان الرقم الأمثل لعدد أوامر التوريد سنويا هو 6 (ولقد افترض في هذا المثال معرفة *ROP, Q).
وإذا لم يكن هذا الفرض قائما فإن *ROP, Q ، رصيد الأمان يجب أن تتحدد تلقائيا ، وهذا يحتاج إلى حل أكثر تعقيدا.

والهدف البعيد لشركة النجوم هو إيجاد رصيد الأمان الذى يدنى إجمالى تكلفة تخزين المخزون الاضافى وتكلفة نفاد الرصيد على أساس سنوى. وببساطة فإن تكلفة التخزين السنوية ما هى إلا تكلفة التخزين × الوحدات الضافية التى تزيد عن ROP . فمثلا ، إذا كان رصيد الأمان 20 وحدة ، الذى يتضمن أن ROP الجديد ومعه رصيد الأمان يصبح 70 أى (50+ 20) . وحينئذ تكون تكلفة التخزين السنوية الإضافية 5 جنيهات × 20 = 100 جنيه.

ويعتبر حساب تكلفة نفاد الرصيد من الأمور الصعبة ، فلأى مستوى لرصيد الأمان، فهو التكلفة المتوقعة لنفاد الرصيد. ويجرى ذلك كالآتى:

التكلفة المتوقعة لنفاد الرصيد = عدد الوحدات المنقوصة × احتمالاتها × تكلفة نفاد الرصيد × عدد مرات \ السنة التى يمكن حدوث نفاد الرصيد (أو عدد مرات أوامر التوريد سنويا)

وحينئذ تضاف تكاليف نفاد الرصيد لكل مستوى ممكن من نفاد الرصيد بمعرفة ROP . فلرصيد الأمان بقيمة صفرية، يحدث قصور قدره 10 وحدات إذ كان الطلب 60 ، وقصور قدره 20 وحدة إذا كان الطلب 70 ، ومن هذا فتكلفة نفاد الرصيد لرصيد أمان صفرى هو (قصور 10 وحدات) × (احتمال 0.2 × (40 جـ \ نفاد رصيدى) × (6 مرات نفاد رصيد ممكن \ سنة + (قصور 20 وحدة) × (احتمال 0.1 × (40 جـ \ نفاد رصيدى) ×(6). ويلخص الجدول (6-4) التكاليف الكلية لكل بديل. ويبلغ رصيد الأمان بأقل تكلفة ، 20 وحدة. وبهذا رصيد الأمان فإن ROP يصبح 50 + 20 = 70 وحدة.

جدول (6-4) التكلفة الكلية لشركة النجوم

رصيد الأمان	تكاليف تخزين إضافية	تكاليف نفاد الرصيد		التكاليف الكلية
			جنيه	جنيه
20	20× 5 =100 جنيه		= صفر	100
10	10 ×5 = 50 جنيه	6 × 40 × 0.1 × 10	= 240	290
صفر	صفر	+ 6 × 40 × 0.2 × 10		
		6 × 40 × 0.1 × 20	= 960	960

رصيد الأمان بدون معلومية تكاليف نفاد الرصيد

هناك العديد من الحالات التى فيها تكلفة نفاد الرصيد غير معروفة و من الصعب جداً تقديرها. مثلا، يُفترض إدارتك لمحل صغير للدراجات الذى يبيع دراجات بخارية صغيرة ودراجات مع ضمان خدمة لمدة عام. فأى تعديلات تجرى خلال العام لا يحصّل عليها رسوم من العميل، فإذا حضر العميل خلال تلك المدة لغرض الصيانة ولم يجد قطعة الغيار الضرورية ، فما هى تكلفة نفاد المخزون؟ فالوضع لا يمكن أن ينظر إليه كفقدان ربح لأن الصيانة تجرى بدون مقابل، وبالتالى فتكلفة نفاد الرصيد هى فقدان ثقة العميل ، بمعنى إمكانية عدم شرائه لدراجة أخرى من محلك إذا كان لك سجل من الخدمة دون المستوى.

وكمدخل بديل لتقدير مستويات رصيد الأمان يجرى إستخدام مستوى للخدمة. ويعرَّف مستوى الخدمة بأنه النسبة المئوية من الوقت الذى لن يكون خلاله خالياً من الرصيد لشىء معين ويعبر عنه كالآتى:

مستوى الخدمة = 1 - احتمال نفاد الرصيد.

أو

احتمال نفاد الرصيد = 1- مستوى الخدمة.

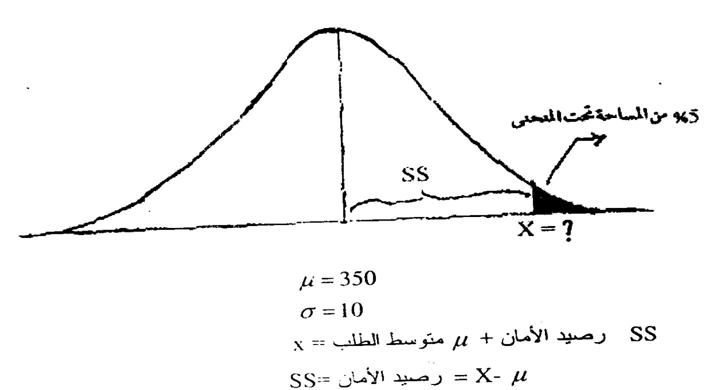
ولتقدير مستوى رصيد الأمان، فمن الضرورى فقط معرفة احتمال الطلب خلال الوقت المتقدم Lead time ومستوى الخدمة المرغوب. والمثال التالى يبين ذلك عندما يتبع ذلك الطلب منحنى التوزيع الطبيعى.

نعرف أن لدى شركة أبو الهول عنصراً مخزوناً ذو طلب له توزيع طبيعى خلال فترة ROP . وكان المتوسط لهذا لطلب 350 وحدة وانحراف معيارى قدره 10. وترغب الشركة فى تطبيق سياسة من شأنها أن ينتج عنها حدوث نفاد مخزونى بنسبة 5 % فقط من الوقت. فكم من رصيد يجب الحفاظ عليه؟ وقد يساعد الشكل (6-8) على تصور الموقف.

فنحن نستخدم خواص المنحنى القياسى للحصول على قيمة Z لمساحة تحت المنحنى قدرها 0.95 = (0.05-1) . وباستخدام جدول الملحق (أ) فى الباب الخامس نجد أن قيمة Z هى 1.65 .

$$Z = 1.65 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{SS}{\sigma}$$

شكل (6-8) رصيد الأمان والتوزيع الطبيعى



$\mu = 350$

$\sigma = 10$

$x =$ متوسط الطلب μ + رصيد الأمان SS

SS= رصيد الأمان = $X - \mu$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{SS}{\sigma}$$

$$1.65 = \frac{SS}{10}$$

$SS = 1.65 \times 10 = 16.5$ OR 17 وحدة

وستتولد مستويات مختلفة من الخدمة، ولكن العلاقة بين مستويات الخدمة ورصيد الأمان هى علاقة غير خطية. وفى الواقع فإنه عند مستويات خدمة أكبر من 97 **% فإن رصيد الأمان** يصبح كبير جداً. **وكما هو معلوم فإن مستويات عالية من** رصيد الأمان تعنى **مستويات أعلى من تكاليف الاحتفاظ** بالمخزون. **فإذا فرض** أن **تكلفة الاحتفاظ** بالمخزون لدى شركة أبو الهول **هى 1 جنيه للوحدة** سنوياً فما هى تكلفة **الاحتفاظ** بالمخزون لمستويات الخدمات التى تتراوح بين 90 إلى 99.99 % ؟ وتتلخص هذه المعلومات عن **التكلفة فى الجدول (6-5).** فبإيجاد مستوى الخدمة من الجدول (6-5) نحصل على قيمة Z من جدول الملحق **(أ)، ثم** تحول هذه القيم إلى وحدات رصيد الأمان. وكما نعرف فإن الانحراف المعيارى للمبيعات خلال **الوقت المتقدم** للشركة هو 10 ومن هذا فالعلاقة بين Z ورصيد الأمان يمكن أن نصل إليها كالآتى:

a. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ c. $Z = \frac{SS}{\sigma}$

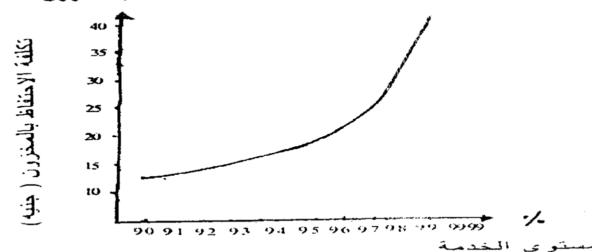
b. $SS = X - \mu$ d. $SS = Z\sigma = Z(10)$

جدول (6-5) التكلفة لمستويات مختلفة من الخدمة

مستوى الخدمة (%)	قيمة Z من جدول المنحنى الطبيعي	رصيد الأمان (وحدات)	تكلفة الاحتفاظ بالمخزون
			جنيه
90	1.28	12.8	12.8
91	1.34	13.4	13.4
92	1.41	14.1	14.1
93	1.48	14.8	14.8
94	1.55	15.5	15.5
95	1.65	16.5	16.5
96	1.75	17.5	17.5
97	1.88	18.8	18.8
98	2.05	20.5	20.5
99	2.32	23.2	23.2
99.99	3.72	37.2	37.2

ويبين الشكل (6-9) أن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون تتزايد بمعدل متزايد، وأنها تكون كبيرة جداً عند مستوى خدمة أكبر من 98 % ، لذا يجب الانتباه الى ذلك . وهذا المنحنى يتكرر لكل مشاكل مستوى الخدمة.

شكل (6-9) مستوى الخدمة مناظرا لتكلفة الاحتفاظ بالمخزون



خامساً : نماذج المخزون ذات الخصومات النقدية

Quantity Discount Models

لزيادة المبيعات تقوم العديد من الشركات بتقديم كميات توريد بأسعار مخصومة لعملائها. والكمية المخصومة ما هى إلا تخفيض سعر الوحدة المباعة عند الشراء بكميات كبيرة . ومن المشاع مصاحبة جداول خصومات للعديد من طلبات التوريد الكبيرة، كما يظهرها الجدول (6-6).

جدول (6-6) جدول الكميات المخصومة

رقم الخصم	الكمية المخصومة	نسبة الخصم	تكلفة الخصم
			جنيه
1	صفر -999	صفر	5.00
2	1.000- 1.999	4	4.80
3	2.000 وأكثر	5	4.75

وكما يرى فالسعر العادى للشىء هو 5 جنيهات ، فحينما يطلب توريد 1.000 إلى 1.999 وحدة فى وقت موحد تهبط تكلفة الوحدة إلى 4.80 جنيها، وهكذا. وعادة فالإدارة يجب أن تقرر متى وكم للتوريد، ولكن فى وجود الكميات المخصومة، فالسؤال هو كيف يتخذ المسئول هذه القرارات؟

وكما نوقشت النماذج المخزونية الأخرى فالهدف العام منها تدنية التكاليف الكلية. ولما كانت تكلفة الوحدة للخصم الثالث فى الجدول (6-6) هى أقلهم فقد يغرى ذلك على إصدار أمر توريد 2.000 وحدة أو أكثر للإستفادة من هذا السعر المنخفض، ولكن ذلك قد لا يدنى التكلفة الكلية للمخزون. فكلما زادت الكمية المخصومة تقل تكلفة الوحدة ، ولكن تزيد تكلفة الاحتفاظ بالمخزون حيث تكون كميات التوريد كبيرة. لذلك فالمفاضلة تكون بين التكلفة المخفضة للوحدة والتكلفة المتزايدة من الاحتفاظ بالمخزون. وبإضافة تكلفة المواد فإن المعادلة للتكلفة الكلية للمخزون السنوى تصبح كالآتى:

تكلفة المواد   تكلفة التوريد   تكلفة الاحتفاظ بالمخزون

$$\text{Total Cost} = \text{Material Cost} + \text{Ordering Cst} + \text{Carrying Cost}$$

$$TC = DC + \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$$

الطلب السنوى بالوحدات = D

تكلفة إصدار أمر توريد لكل أمر توريد = C_O

تكلفة الوحدة = C

تكلفة التخزين للوحدة فى السنة = C_h

و علينا الآن تحديد EOQ ، **ولكن لتباين الخصومات فهذه العملية ستتضمن أربع خطوات:**

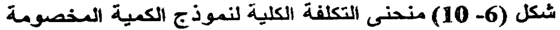
1 - لكل سعر خصم، تحسب Q^* باستخدام المعادلة التالية:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_O}{IC}}$$

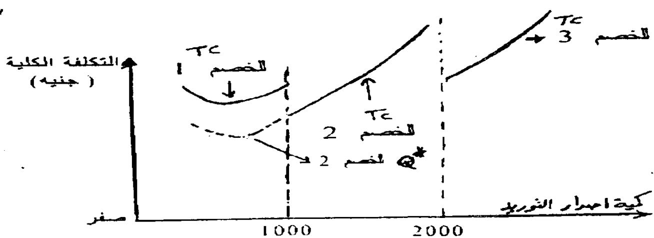
وجدير بالملاحظة **أن تكلفة الاحتفاظ** بالمخزون هى (IC) بدلا من (C_h)، **ولأن تكلفة الوحدة هى** عامل فى تقدير **تكلفة الاحتفاظ** بالمخزون، فلا نستطيع افتراض **أن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون ثابتة** عندما تتغير **تكلفة الوحدة لكل** كمية مخصومة. لذلك فمن الشائع التعبير **عن تكلفة الاحتفاظ** بالمخزون **(I) كنسبة من تكلفة** الوحدة (C) بدلاً من تكلفة ثابتة **للوحدة** \ سنة (C_h).

2- لأى خصم ، **إذا كانت كمية أمر** التوريد منخفضة جدا بدرجة **لا تسمح بتأهيلها للخصومات، تعدل** الكمية المطلوب **توريدها إلى** أعلى أى إلى أقل الكمية التى **تؤهل للخصومات. فعلى سبيل المثال،** إذا كانت **الكمية Q^* للخصم** رقم (2) فى الجدول (6-6) كانت 500 **وحدة فيجب تعديل هذه القيمة** إلى 1000 وحدة . **فالكميات** المطلوب توريدها عند هذا الخصم تتأهل **لخصم 4 % ، فقد تكون** **للكمية التى تقع فى المدى** 1000 إلى 1.999 هى أقل التكلفة الكلية.

وكما هو مشاهد فى الشكل (6-10) فإن منحنى التكلفة الكلية **منكسر إلى ثلاث منحنيات** مختلفة. فهناك منحنى **للتكلفة** الكلية للخصم الأول (صفر $\leq Q \leq$ 999)، **والثانى (1.000 $\leq Q$** $\leq$ 1.999) **والثالث (2000** $\leq Q$).



شكل (6- 10) منحنى التكلفة الكلية لنموذج الكمية المخصومة



وبالنظر إلى منحنى التكلفة الكلية للخصم (2) نجد أن *Q لذلك الخصم أقل من المدى المسموح له بالخصم وهو الذى بين 1.000 و 1.999 وحدة. وكما يرى من الشكل (6-10) فإن أقل الكميات المسموح بها فى هذا المدى هى 1.000 وهى الكمية التى تدنى التكلفة الكلية. ولذلك فإن الخطوة الثانية هى للتأكيد على عدم صرف النظر عن كميات التوريد التى توصلنا إلى التكلفة الدنيا لها، فإذا كانت الكمية المحسوبة *Q فى الخطوة الأولى أكبر من المدى الذى يؤهلها للخصومات فيصرف النظر عنها.

3 - وباستخدام المعادلة الخاصة بالتكلفة الكلية، تحسب التكلفة لكل *Q مقدرة فى الخطوتين 1، 2 . فإذا أريد تعديل *Q إلى أعلى/أنه كان تحت مدى الكمية التى تسمح بالخصم، فيجرى استخدام الكمية المعدلة لـ *Q .

4- استخدم *Q ذات أقل تكلفة كلية كما حسبت فى الخطوة 3 فهى الكمية التى ستدنى التكلفة الكلية للمخزون.

مثال:

لمحل تمارا لألعاب الأطفال أرصدة من لعب السيارات الحكومية. وقد أعلن عن جدول للكميات المخصومة كما أشير إليها فى الجدول السابق (6-6)، وسعر التكلفة العادى للسيارة هو 5 جنيهات، وفى الخصم الثانى فالتكلفة 4.8 جنيهاً، وفى الخصم الثالث فالتكلفة 4.75 جنهاً. زد على ذلك فتكلفة إصدار أمر التوريد هى 49 جنيهاً، والطلب السنوى هو 5000 سيارة، وتكلفة الاحتفاظ بالمخزون هى بنسبة 10% (0.1) من التكلفة . فما هى الكمية التى ستدنى التكلفة الكلية للمخزون؟

فالخطوة الأولى هى حساب *Q لكل خصم فى الجدول (6-6) كالآتى:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{(2)(5.000)(49)}{(0.2)(5.00)}} = 700 \quad \text{سيارة / التوريد}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{(2)(5.000)(49)}{(0.2)(4.80)}} = 714 \quad \text{سيارة / التوريد}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{(2)(5.000)(49)}{(0.2)(4.75)}} = 718 \quad \text{سيارة / التوريد}$$

والخطوة الثانية هى تعديل كميات *Q التى تحت الكميات المصرح بها للخصومات، فنجد أن Q_1^* بين صفر و 999 وبالتالى فلا تحتاج إلى تعديل. أما الثانية والثالثة فتحتاجان إلى تعديل، Q_2^* تعدل إلى 1000 وحدة، Q_3^* تعدل إلى 2000 وحدة. ثم يجرى حساب التكلفة الكلية فى ضوء تلك التعديلات .

$Q_1^* = 700$

$Q_2^* = 1000$ – adjusted تعديل

$Q_3^* = 2000$ – adjusted تعديل

والخطوة الثالثة هى التكلفة الكلية لكل من أوامر التوريد، كما يتضح من الجدول (6-7).

جدول(6-7) حسابات التكلفة الكلية لمحل تمارا لألعاب الأطفال

رقم الخصم	ثمن الوحدة	الكمية للتوريد	تكلفة العربات السنوية	التكلفة السنوية لأمر التوريد	التكلفة السنوية للاحتفاظ بالمخزون	التكلفة الكلية
			..... جنيه			
1	5.00	700	25.00	350	350	25.700
2	4.80	1000	24.000	245	480	24.725
3	4.75	2000	23.750	122.5	950	24.823

والخطوة الرابعة هى اختيار كمية أمر التوريد ذات **الأقل تكلفة كلية**. وبالنظر إلى الجدول (6-7) نجدها الكمية **1.000** وحدة. ولكن لما كانت التكلفة الكلية لـ **2.000 وحدة أكثر قليلاً** عما هى بالنسبة لـ 1.000 وحدة، فإذا أمكن تقليل الخصم الثالث إلى 4.65 جنيهاً فيمكن الأخذ بكمية إصدار التوريد الثالث لتكون التى تدنى التكلفة الكلية للمخزون.

***

الباب السابع

مراقبة نوعية المخزون وإعداد ميزانيته

Quality Inventory Control and Budgeting

مقدمـــة .

يُواجه مصنعو الأغذية مشكلة من نوع خاص حيث يقيد الحصول على المواد الخام من وقت الإنتاج، ليكون فى موسم معين بالذات من العام. وليست المشكلة فى عدم تقدير تكرارات زيادة الإنتاج لكى نحافظ على مستوى المخزون، بل هى فى كيفية تقدير كمية ونوعية المادة الخام التى ستشترى فى حدود متطلبات الميزانية للناتج النهائى ذى النوعية المعينة.

الإنتاج الموسمى

إن أى قرار بخصوص عملية منفردة فى الزراعة، التصنيع، أو التسويق لسلعة غذائية له آثار بعيدة المدى ليس فقط على تلك العملية ولكن أيضا على كل عملية أخرى فى الدورة الكاملة بداية من توفير المادة الخام وما يتعلق بها، وحتى الانتهاء من حيازة الناتج النهائى. وهذه النظرة المتكاملة هى إحدى سمات اجرءات بحوث العمليات. وكما هو مطبق فى مثالنا، فإن الشىء الذى سيُتخذ القرار بخصوصه سيُتعامل معه كمتغير، بينما باقى الأشياء ستُعامل كقيود. وفيما يلى أمثلة عن طبيعة المعلومات والأجهزة التى سنحتاجها لإعطائنا تقديرات دقيقة وقياسات للنوعية، وتكلفة حقيقية، وبيانات سعرية - والتى فى ضوئها ستتخذ القرارات:

1- أساليب معتمدة لأخذ العينات، وقياس النوعية للمواد الخام والناتج النهائى، والعلاقات المتداخلة بينهم.
2- تكلفة شراء و إنتاج المادة الخام، أو العائد الاجمالى المتوقع لمزارعى المادة الخام.
3- علاقة النوعية بكمية المادة الخام المنتجة ممثلة فى صورة طن \ للفدان، أو بنسبة أقصى غلة فى حالة الحصاد بطريقة خاصة ينتج عنها أقصى غلة.
4- العلاقة بين نوعية المادة الخام و غلة الناتج النهائى لكل درجة نوعية من الناتج النهائى.
5- التكاليف الكلية المباشرة وغير المباشرة لكل عملية تصنيع وتسويق.
6- تقدير قيمة المبيعات لكل مستوى نوعية لكل سلعة.

والآتى هو بعض المشاكل التقليدية التى يتعين على إدارات التصنيع الغذائى اتخاذ قرارات بشأنها:

1- **الناتج الخام:** هل سيُشترى أو يُنتج ؟ هل الشراء سيكون على أساس الوزن فقط ، على أساس درجة النوعية ؟ وإذا كان على أساس النوعية، فهل ستدفع علاوة إضافية على درجة النوعية الأعلى؟ وإذا كان هناك درجات نوعية متعددة، فما هى التى ستكون أكثرها ربحا؟

2- **عملية التصنيع: Processing – هل سيفرز المعيب؟**.وهل ستكون عملية الفرز يدوية أو ميكانيكية ؟ وكم من المجهود الذى يبرر **لمحاولة الارتفاع** بجودة الناتج ؟ وما هو الجزء من المعبأ الكلى سيوجه إلى أى سعة عبوة ؟ وما هى نوعية العبوة؟

3- **المبيعات والتسعير:** هل يمكن تخفيض السعر؟ وإذا خفض السعر فهل يمكن استمرارية مدفوعات الناتج الخام؟

مثال (1): مراقبة المخزون لسلعة تُنتج موسميا

لنفترض أن هناك مشكلة معبىء البازلاء السكرية الذى يُتعاقد مع مزارعيها فى مساحات معينة، والتى سيكون الدفع على أساس درجة الجودة. وقد توفرت **الأجهزة الدقيقة لقياس** درجات النضج لتحديد الجودة. فالسؤال الذى يواجهه: **هو كم يستطيع دفعه للبازلاء الخام** وهى ما زالت داخل ثمرتها لكل درجة جودة. **فهنا** يكون المدفوع للناتج الخام **هو المتغير وكل الأوضاع الأخرى هى قيود. هذا** ومن المشاع **افتراض أن أكثر** البازلاء نضجاً هى التى ستكون **الأكثر جودة، بمعنى أن** السعر الأعلى سيكون للبازلاء **الأكثر** غضاضة، إلا أن هذا ليس بالضرورة صحيحاً **كما سيتضح فى** العرض **لاحقاً**.

القيد (1): ويرى فى الجدول (7-1) **معبراً عنه بالأسعار** التى يمكن أن يتحصل عليها لكل مستوى جودة من البازلاء المعبأة.

القيد (2): وهو إجمالى تكلفة التصنيع والتسويق **مخصوماً منه** تكلفة المادة الخام، كما يرى فى **العمود الثالث** من الجدول(7-1). **وقد يضاف إليه أو لا يضاف، عنصر الربح** كجزء من الرقم الكلى **للتكلفة. أما الفروق** المشاهدة **فى العمود** الرابع **من نفس الجدول فهى مجموع ما** يتاح شراؤه لحساب **الناتج الخام.**

القيد (3): وهو العلاقة بين كمية **الناتج من البازلاء المعلبة لكل طن من** الناتج الخام، وجودة **البازلاء الخام.** وقد ترسخت هذه **العلاقة كما يرى فى الجدول** (7-2) **فى الأعمدة** (1)، (2) معبراً عنها بعدد الدستات من علب نمرة 303 **لكل طن من البازلاء التى تختلف فى درجات غضاضتها.**

القيد (4): وهو ما **يتصل بطريقة فرز البازلاء فى المصنع.** ونظراً لوجود فرازى الجودة وعملهم المبنى على قاعدة الطفو الملحى، فإن العينة المختارة من البازلاء تقسم إلى أجزاء حسب كثافتها النوعية. فالبازلاء الصغيرة والغضة يزيد احتمال طفوها فى المحلول الملحى المعروف مع ما يصاحب ذلك من إمكانية تعبئة جزء كبير منها كمنتج عالى الجودة. وهذه العلاقة لأجزاء من البازلاء التى تخضع للتدريج حسب جهاز تقنين الغضاضة، تعرض فى صور مختلفة كما ترى فى الجدول(7-2) الأعمدة 3، 4، 5.

ولدينا الآن المعلومات الضرورية التى على أساسها يمكن إتخاذ القررات بخصوص قيم البازلاء الخام.

جدول (7-1) مجموعات متاحة بغرض شراء البازلاء الخام

(1)	(2)	(3)	(4)
درجة جودة الناتج النهائى	السعر المتوقع للدستة من عبوات رقم 303	تكاليف أخرى بخلاف البازلاء الخام	الفرق المتبقى لحساب البازلاء الخام (2) – (3)
	$		
A(فاخرة)	1.45	1.01	0.44
B(ممتازة)	1.30	1.00	0.30
C(جيدة)	1.15	0.98	0.17

جدول (7-2) الغلة من البازلاء المعبأة لكل طن تم حصاده من البازلاء الخام عند درجات مختلفة من النضج

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
درجة قياس الغضاضة للبازلاء الخام	عدد الدستات من العبوات رقم 303 المعبأة لكل طن من البازلاء الخام				جدول المدفوعات المرتقب
	إجمالى	فاخرة	ممتازة	جيدة	$
80	166	166			73.04 *
90	186	186			81.84
100	195	185	10		84.40 **
110	205	62	143		70.18
120	212	21	191		66.54
130	217		195	22	62.24 ***
140	222		155	67	57.89
150	227		91	136	50.42
160	230		46	184	45.08

ملاحظات ; * 73.04 = 0.44 × 166

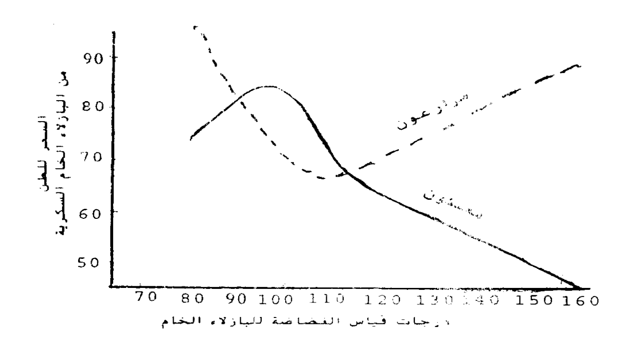
** 84.40 = (0.30× 10) + (0.44 × 185)

*** 62.24 = (0.17 × 22) + (0.30 × 195)

وهذا الجدول السابق (7-2) هو ما يبرر به معبىء البازلاء مدفوعاته لمزارعيه كما يرى فى العمود (6)، وهو ما يمثله الخط المتصل فى الشكل (7-1) . فإذا أتبع هذا النظام وكانت تقديراته للأسعار

والتكاليف الأخرى صحيحة، فسيتحقق نقطة التعادل (أو يحدث ربحا اذا تضمن ذلك فى أرقام التكلفة) بصرف النظر عن نوعية البازلاء المستلمة.

شكل (7-1) الأسعار التى يمكن لمعبى البازلاء أن يدفعها **(خط متصل) أو يمكن أن يستلمها المزارعون (خط متقطع) لكل طن خام عند درجات الجودة المختلفة**



ومن نفس المنطق السابق، أى تقديم جودة المادة الخام، يمكننا أيضاً تقديم عوامل أخرى كمتغيرات بديلاً عنها كثوابت. ففى الجداول (7-3) ، (7-4) أعتبرت التكاليف بدون المواد الخام، كمتغيرات، ففى الجدول (7-3) أعطيت الفروق المتاحة لشراء المادة الخام، فى مقابل تفاوت تكاليف الانتاج والتسويق. وفى الجدول (7-4) نرى الأسعار التى يمكن أن تقدم لدرجات الغضاضة المختلفة للبازلاء الخام حينما تتباين التكاليف من 0.70 $ إلى 1.20 $ لكل دستة من البازلاء المعلبة. وبالتالى بدلا من الحصول على منحنى منفرد معيناً مدفوعات البازلاء الخام، فبحوزتنا الآن مجموعة من المنحنيات كما يتبين من الشكل (7-2).

جدول (7-3) الأسعار والتكاليف، مطروحاً منها المادة الخام

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
		التكاليف غير متضمنة المادة الخام $					
درجة الجودة	السعر	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
		الفرق المتبقى للبازلاء الخام					
A	1.45	0.75*	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25
B	1.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
C	1.15	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05	-

$0.70 - 1.45 = 0.75$ *

جدول (7- 4)أسعار التعادل لمعبىء البازلاء السكرية \ طن بافتراض التكاليف التالية لكل دستة عبوات 303، ولا تتضمن المادة الخام

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
درجة قياس الغضاضة	التكلفة لكل دستة عبوة 303، لا تتضمن المادة الخام $					
	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
80	124.50*	107.90	91.30	74.70	58.10	41.50
90	139.50**	120.90	102.30	73.70	65.10	46.50
100	144.79	125.29	105.79	86.29	66.79	47.29
110	132.23	111.73	91.23	70.73	50.23	29.73
120	130.38	109.18	97.98	66.78	45.58	24.38
130	126.95	105.25	84.18	63.11	42.04	20.97
140	123.21	101.01	78.81	56.61	34.35	12.21
150	115.77	93.07	70.37	47.67	24.97	2.27
160	110.40	87.40	64.40	41.40	18.40	..

$186 \times 0.75 = 139.50$ **

* $166 \times 0.75 = 124.5$ (جدول 7-2)

قرار المورِّد

فكما كان للمعبىء اهتمامه فى تجنب العمليات التى تسبب خسارة له بصرف النظر عن نوعية البازلاء المستلمة، فإن للمورد نفس الاهتمام فى حصوله على أكبر عائد من مساحته المزروعة، فإذا كان له البيع على أساس الوزن فانه سيحصد محصوله عند الدرجة القصوى للغلة، والتى من المحتمل أن تكون على درجة من النضج لا تتحقق معها 100 % من الدرجة الفاخرة. كما أنه إذا أراد الحصول على مستحقاته على أساس درجة النضج فما عليه إلا أن يبحث تلك العلاقة غلة \ جودة ليصل إلى تحديد وقت حصاد الناتج الذى سيعظم العائد، حيث أن تعظيم الغلة ليس بالضرورة أن يتطابق مع تعظيم العائد للفدان.

وهنا نرى ثانية أن جودة الناتج هى المتغير مع عائد الفدان وتكاليف إنتاجه كقيود.

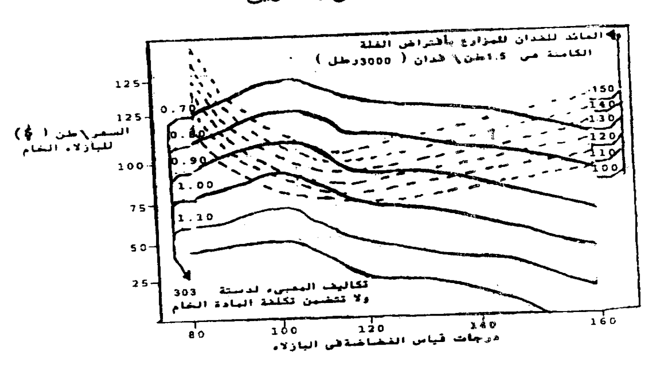
القيد (1) وهى الغلة الكامنة للفدان ، إذا حصدت البازلاء عند درجة نضج تتطابق مع أقصى غلة للفدان، وهى فى مثالنا 3000 رطل للفدان.

القيد (2) وهى العلاقة بين درجة الجودة للبازلاء الخام ، والنسبة المنوية لأقصى غلة كامنة. وهذه قد استقرت وتشاهد فى الأعمدة (1) ، (2) من الجدول (7-5).فعلى سبيل المثال، فالبازلاء المحصودة فى درجة مبكرة من النضج قد أعطت درجة قياس 80 منتجة فقط 60 % من الغلة الكامنة، فبتأجيل الحصاد لعديد من الايام حتى تصل درجة القياس 110 ، تزيد نسبة الغلة الكامنة.

القيد(3) إجمالى العائد المتوقع للفدان للمزارع، فإذا رضى المزارع بإجمالى عائد قدره 100 دولار \ للفدان فيستطيع أن يتقاضى 110 دولار \ للطن من البازلاء كما يشاهد فى العمود (3) من

الجدول (7-5) والخط المتقطع فى الشكل (7-2). وترى فى الأعمدة الأخرى من ذلك الجدول جداول مماثلة عند زيادات إجمالية للعائد للفدان، وكما ترى أيضاً فى الشكل (7-2) لعائلة المنحنيات.

شكل (7-2) نوموجراف يبين مدفوعات البازلاء الخام على أساس الجودة وبتأثرها بتكاليف المزرعة، والتصنيع والتسويق



جدول (7-5) أسعار المزارعين \ طن مطلوب للحصول على إجمالى العوائد لكل فدان عند درجات مختلفة من النضج، مفترضين أن الغلة الكامنة هى 3000 رطل \ فدان

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
درجة قياس الضاضة	%لأقصى غلة كامنة	إجمالى العائد للفدان $						
		100	110	120	130	140	150	160
		سعر الطن $						
80	60	111.11*	122.22	133.33	144.44	155.55	166.66	177.77
90	80	83.33	91.67	100.00	108.33	116.67	125.00	133.33
100	93	71.68	78.85	86.02	93.19	100.36	107.53	114.70
110	100	66.76	73.33	80.00	86.67	93.33	100.00	106.66
120	95	70.18	77.19	84.21	91.22	98.24	105.26	112.28
130	90	74.07	8148	88.89	96.30	103.71	111.11	118.52
140	85	78.43	86.27	94.11	101.95	109.80	117.64	125.49
150	79	84.39	92.83	101.27	109.71	118.15	126.58	135.02
160	76	87.72	96.49	105.26	114.03	122.80	131.58	140.35

* 111.11 = {100÷ (3000 × 0.60) } × 2000 رطل (طن عبوات 303)

أحسن الحلول : بافتراض أن إنتاج البازلاء الخام وتصنيعها فى العبوات ، وتسويقها تقع كلها تحت إدارة واحدة، فالأسئلة بالضرورة لن تكون : كم يُدفع أقل للبازلاء الأكثر نضجاً (قرار المعبئ) أو يجرى الحصاد للحصول على أكبر عائد للفدان (قرار المزارعين)، ولكن الأسئلة ستكون ما هو أنسب وقت لحصاد البازلاء لامكانية تحقيق تعظيم للأرباح وتدنية للتكاليف، وقد كانت الإجابة على ذلك من المشكلة المحددة المشار إليها فى الشكل (7-1)، وحيث مساحة الأرباح هى ما بين المنحنيين. والحل المربح هو ما بين قراءتى قياس الغضاضة 90-115 ، وأن أحسن الحلول هو عند القراءة 102 . ويزود الشكل (7-2) بمعلومات مماثلة لتكاليف المعبئين وأموال عائد المزارعين.

لذلك فقد تقررت سياستنا لشراء أو حصاد البازلاء عند درجة القياس 102، وحيث يمدنا ذلك بـ 95 % من الغلة الكامنة والمقدرة بـ 3000 رطل للفدان، أو 2850. وبالرجوع إلى جدول (7-2) نجد أن بازلاء بهذه الدرجة من النضج، فقد نتوقع انتاج (كمية أقل نسبياً من 185 دستة) حوالى 175 دستة [عمود "3" جدول (7-2)] عبوات من البازلاء الفاخرة، وحوالى 10 دستة [عمود "4" جدول (7-2)] عبوة من البازلاء الممتازة لكل طن من البازلاء المصنعة. ولكننا الآن لم نجب على السؤال ما مقدار كمية التصنيع، ما لم نفترض أننا قادرون على بيع كمية غير محدودة من أى درجة جودة ، طبقاً للأسعار والتكاليف المبينة.

مثال (2) قيود الانتاج والجودة

أسلوب simplex_سنجعل الآن مشكلتنا أكثر تعقيداً بقيود اضافية يعلمها الغالبية من المعبئين. نفترض أنه بالإضافة إلى القيود فى المثال السابق، وجود قيد على الطاقة الإنتاجية للمصنع، وإمكانية توفر بازلاء من جودة معينة. فيمكن تشكيل هذه المشكلة فى صورة برمجة خطية كما فى الجُدول (7-6) حيث يوجد هنالك ثلاث أنشطة حقيقية (شراء وتعبئة البازلاء عند ثلاث مستويات للجودة) ، وهذه الأنشطة مقيدة بعدة طرق. فالمجموعة الأولى من القيود تتعامل مع توفر ثلاث قياسات نضج من البازلاء ، وهناك فقط متوفر 3000 طن من البازلاء بغضاضة 95، 5000 طن من البازلاء بغضاضة 105 ، 3000 طن من البازلاء بغضاضة 115 .هذا بالإضافة .إلى أن المصنع ذو طاقة إنتاجية لا تزيد عن 6000 طن، أما المجموعة الأخيرة من القيود فهى تتعامل مع حد أقصى لمبيعات البازلاء المعلبة كالتالى: 3500 طن من الفاخرة، 2500 طن من الممتازة ، 1000 طن من الجيدة قد يمكن بيعها.

ومن اليسير أن نرى فى جدول (7-6) أن وحدة واحدة من نشاط العمود (ذى القيمة 5 دولار):

1- ستدر ربحا قدره 5 دولارات.
2- تستخدم طناً واحداً من البازلاء غضاضة 95 المتاحة.
3- لا تستخدم بازلاء بغضاضة 105.
4- لا تستخدم بازلاء بغضاضة 115.
5- تستخدم طناً واحداً من طاقة الانتاج للمصنع.
6- تستخدم 0.9 طن من المبيعات الممكنة من البازلاء المعلبة الفاخرة.

7- تستخدم 0.1 طن من المبيعات الممكنة من البازلاء المعلبة الممتازة.
8- لا تستخدم أى من المبيعات الممكنة من البازلاء المعلبة الجيدة.

وكان الحل الأمثل لهذه المشكلة كالآتى :

1- اشتر وعبئ 1000 طن من البازلاء الغضة # 95
2- اشتر وعبئ 5000 طن من البازلاء الغضة # 105.
3- لا تشتر أى من البازلاء الغضة # 115

وتبين أسعار الظل الآتى:

1-أنه يجدر انفاق 5 دولارات لزيادة إمكانية الحصول على بازلاء بدرجة غضاضة 105 بمقدار طن واحد.
2-أنه يجدر إنفاق 5 دولارات لزيادة الطاقة الإنتاجية للمصنع بمقدار طن واحد.
3-أنه لا قيود أخرى تؤثر فى الحل (حيث أن كل أسعار الظل تساوى صفراً)

هذا ومن الطبيعى أن أصعب جزء فى هذه المشكلة هو إيجاد البيانات الضرورية ، وأنه يتطلب بذل الجهد لتقدير العبوات التى سيتحصل عليها من القراءات المختلفة لدرجات النضج، كما ن صافى الإيراد لكل نشاط لا يقل صعوبة عن الأخرين فى الحصول عليه، ولكن تطلق هذه التحذيرات ليس لتثبيط همم من سيجْرون استخدام تلك الطرق الكمية،ولكن لاعدادهم لهذه المهمة عند مواجهتها.

جدول (7-6) الجدول المبدئى للتوزيع الامثل لطاقة المصنع

الجانب الأيمن من القيد	2	10	5	$	C_j
	اشتر وعبىء 115#	اشتر وعبىء 105 #	اشتر وعبىء 95 #		
				امكانية توفر البازلاء الخام	
≤ 3000	0	0	1	غضاضة # 95	
≤ 5000	0	1	0	غضاضة # 105	
≤ 3000	1	0	0	غضاضة # 115	
≤ 6000	1	1	1	طاقة المصنع	
				المبيعات الكامنة للبازلاء المعلبة	
≤3500	0.3	0.5	0.9	فاخرة	
≤ 2500	0.3	0.4	0.1	ممتازة	
≤ 1000	0.4	0.1	0	جيدة	

***

الباب الثامن

تطبيقات متقدمة فى البرامج الخطية

أ – المزج بين العديد من المنتجات تلقائياً

مقدمة

سبق لنا العرض سابقا ، للمشاكل التى امتزجت فيها مكونات المخلوط للحصول على ناتج نهائى واحد. وفى تباين لذلك ، تتواجد المشاكل التى فيها يمتزج أكثر من ناتج واحد، وناتجان أو أكثر يستخدمان مكوّنا مشاعا بينهما.

مثال: المزج البترولى

لدينا معملا لتكرير البترول الذى ينتج ثلاثة أنواع من زيت السيارات، عادى Standard ،ممتاز Extra ،مخصوص Special. وكانت أسعار البيع للوحدة كوارت Quart (مكيال حجم أمريكى للسوائل عبارة عن لتر واحد) هى 0.75 $ ، 1.00 $ ، 1.50 $ على الترتيب. ويمكن تصنيع هذه الزيوت من ثلاث مكوّنات رئيسية _الزيت الخام، البرافين،والمادة المالئة، وكانت تكلفة هذه المكوّنات هى 0.50 دولار ، 0.20 دولار ،0.25 دولار لكل كوارت على الترتيب. وقد وضع مهندسو الشركة المواصفات الخاصة لهذه الزيوت كالآتى:

عادى	Standard	50 % برافين 50 % مادة مالئة
ممتاز	Extra	على الأقل 25 % زيت خام حد أقصى 50% برافين
مخصوص	Special	على الأقل 50 % زيت خام حد أقصى 20 % برافين

ومع وجود طاقة إنتاجية قدرها 100 ، 80 ، 60 ، كوارت \ يوميا لكل من الزيت الخام ، والبرافين ، والمادة المالئة، فالسؤال ما هو المزيج الذى سيعظم الأرباح، والذى يتضح أنها مشكلة برمجة خطية.

فالخطوة الأولى هى إعداد قائمة بالأنشطة المتاحة، وهى:

(أ) بيع العادى Standard

(ب) بيع الممتاز Extra

(جـ) بيع المخصوص Special

ولكن لكى نبيع، يجب أن يكون لدينا انتاجا. فلتجهيز المطلوب، يمكننا :

1- عمل نوع Standard من البرافين، والمادة المالئة بنسبة ثابتة.
2- عمل نوع Extra من الزيت الخام
3- عمل نوع Extra من البرافين
4- عمل نوع Extra من المادة المالئة
5- عمل نوع Special من الزيت الخام
6- عمل نوع Special من البرافين
7- عمل نوع Special من المادة المالئة

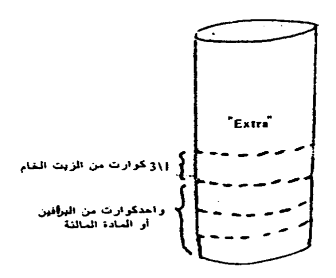
ولكن يجب فرض قيود على كل الأنشطة 2-7، ويعرض لنا الجدول (8-1) الجدول المبدئى لهذه المشكلة. وتمثل الأعمدة الثلاثة الأولى أنشطة المبيعات، وتُبنى هذه الأنشطة على الصفوف الثلاث الأولى وهى تمثل كميات الزيت المتاح للبيع، وبالطبع، فأوليًا- المخزون لكل يساوى صفرا. أما العمود الرابع فيمثل إعداد كوارت واحد من Standard، وبقراءة هذا العمود، نجد أن كل وحدة من هذا النشاط :

1- تضيف كوارت واحد للمخزون من Standard
2- تستخدم نصف كوارت من البرافين
3- تستخدم نصف كوارت من المادة المالئة

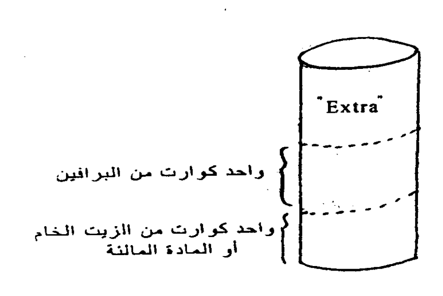
وتعكس الأعمدة الثلاثة التالية ، الثلاث وسائل لعمل النوع Extra . وبفحص الست صفوف الأولى من الجدول الأولى، يتضح أن كل من الأعمدة 5-7 تمثل أخذ كوارت من واحد من المكونات وتضعه فى برميل يسمى" Extra ". فإذا لم تتواجد قيود أخرى فسيحاول البرنامج الخطى عمل النوع " Extra" من البرافين فقط حيث أنه أرخص مكوّن.والغرض من الصف 7 ، 8 فى الجدول المبدئى هو التأكد من أن المخلوط النهائى من " Extra " سيكون فى حدود المواصفات المرغوبة. ويصور الشكل (8-1) المنطق الذى نحتاجه لتعريف المعاملات Coefficients فى الصف السابع. وتتطلب مواصفاتنا أنه بالنسبة للنوع " Extra " يجب أن يكون هناك على الأقل 25 % زيت خام. وهذا معناه أننا إذا صببنا كوارت من البرافين (أو المادة المالئة) فى برميل نسميه " Extra " فيجب أن نضيف على الأقل 1\ 3 كوارت من الزيت الخام لكى نصل إلى 25 % الحد الأدنى. ويُعرَف الصف " الحد الأدنى لخام Extra " فى صورة كوارتات من الزيت الخام،ونتيجة لذلك، فالعمود (5) (الذى يمثل صب كوارت من الزيت الخام فى البرميل المسمى " Extra ") يقابل احتياجات وحدة واحدة من الحد الأدنى للزيت الخام. والعمود (6) (الذى يمثل صب كوارت من البرافين فى برميل " Extra ") يفرض احتياجا معناه أنه على الأقل سيضاف 1\ 3 أى (0.33) كوارت من الزيت الخام إلى البرميل. ويفسَّر العمود (7) بنفس الأسلوب. ويصور الشكل (8-2) منطقا مماثلا فى تعريف المعاملات التى تحد من كميات البرافين التى سيسمح بها فى المزيج النهائى، فبالسماح بحد

أقصى 50% من البرافين فسيسمح بكوارت واحد من الزيت الخام (أو المادة المالئة) ليضاف إليه كوارت واحد على الأكثر من البرافين لنصل إلى المخلوط.

شكل (8-1) تصور معنى المعاملات التى تصف الحد الأدنى من الزيت الخام فى " Extra "



شكل (8-2) تصور معنى المعاملات التى تصف الحد الأقصى للبرافين فى " Extra "



كوارت = وحدة حجمية أمريكية للسوائل

جدول (8-1) الجدول المبدئي لمشكلة المنتجات المتعددة الممزوجة من زيوت السيارت

الصف	النشاط	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)		(RHS)
	C_j	0.75	1.00	1.50	-0.225	-0.50	- 0.20	-0.25	-0.50	-0.20	-0.25		
		بيع A	بيع B	بيع C	إعداد A	خام إلى B	برافين إلى B	مالئة إلى B	خام إلى C	برافين إلى C	مالئة إلى C		مستوى النشاط
1	المعروض من (A) Standard	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	≤	0
2	المعروض من (B) Extra	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	≤	0
3	المعروض من (C) Special	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	≤	0
4	المعروض من الزيت الخام	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	≤	100
5	المعروض من البرافين	0	0	0	0.5	0	1	0	0	1	0	≤	80
6	المعروض من المادة المالئة	0	0	0	0.5	0	0	1	0	0	1	≤	60
7	أدنى خام (Extra)	0	0	0	0	1	-0.33	-0.33	0	0	0	≥	0
8	أقصى برافين (Extra)	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	≤	0
9	أدنى خام (Special)	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	≥	0
10	أقصى برافين (Special)	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	1	-0.25	≤	0

ب- دور رأس المال العامل فى مصفوفة البرنامج الخطى

مقدمة

عرضنا فى الباب الأول مشكلة الانتاج باستخدام البرمجة الخطية (جدول 1-3). هذا ولم نتعامل مع رأس المال العامل، إلا أننا فى هذا المكان سنرى كيفية تضمين ذلك فى عملنا.

مثال:

بتعديل المشكلة المعروضة فى الجدول (1-3) لتضمن أن المزارع لديه رأس مال مبدئى قدره 100 دولار، وأنه يستطيع الاقتراض بلا حدود بفائدة قدرها 10 %، يعرض الجدول (8-2) الجدول المبدئى الجديد لتلك المشكلة.

جدول (8-2) الجدول المبدئى لمشكلة راس المال العامل

C_J	56	47	-0.10		
	الذرة	فول صويا	اقتراض راس المال		مستوى النشاط
الأرض	1	1	0	≤	50
العمالة	3	2	0	≤	120
رأس المال	35.5	22	-1	≤	100

وطالما أن رأس المال غير محدود لعدم وجود قيود على الإقتراض، فالناتج الأمثل لكلا المحصولين لم يتغير، إلا أن الربح قد انخفض من 2530 دولار إلى 2403 دولار كما يبينه الحل النهائى بالجدول (8-3).

جدول (8-3) الحل الأمثل لمشكلة رأس المال العامل

النشاط	مستوى النشاط
الذرة	20
فول الصويا	30
راس المال المقترض	1270
الربح	2403

هذا ويشير الجدول (8-4) إلى التدفق النقدى لهذه المشكلة حيث يتضح الفارق بين رقمى الربح والذى يرجع إلى مدفوعات الفائدة على المال المقترض، أى أن مفهوم رأس المال العامل ومدفوعات الفائدة لغرض التخطيط هو ما يحتويه البرنامج الخطى ضمنياً. ولكن هنا القول لا ينطبق عموما على رأس المال الثابت والقروض طويلة الأجل ما لم تذكر فقرات خاصة.

جدول (4-8) ملخص للدخل والانفاق لمشكلة راس المال العامل

الدخل	دولار	
رأس المال الابتدائي	100	
رأس المال المقترض	1270	
بيع ذرة (20 فدان × 75 بوشل \ فدان × 1.22 دولار \ بوشل)	1830	
بيع فول صويا(30 فدان × 30 بوشل \ فدان × 2.30 دولار \ بوشل)	2070	
		5270
الانفاق		
سداد رأس المال الابتدائي	100	
سداد القرض	1270	
تكلفة متغيره للذرة (20 فدان × 35.50 دولار \ فدان)	710	
تكلفة متغيرة لفول الصويا (30 فدان × 22.00 دولار \ فدان)	660	
سداد قيمة الفائدة على القرض	127	
		2867
صافي الربح		2403

كما أعطانا الازدواج The Dual (العرض المعكوس للطريقة السابق التعامل بها) القيمه المستحقة من استخدام وحدة إضافية من المورد، فقد أوضح الجدول (3-1) أن تلك القيمة ستتكلف 29 دولار لفدان اضافي واحد،9 دولارات لساعة عمل إضافية واحدة.

*

جـ - تطبيقات تمويلية Financial Application

جـ - 1- اختيار المحفظة المالية portfolio Selection

وهى من المواقف التى تواجهها الإدارة الماليه، التى يتعين على المدير اختيار نوعيات خاصة من الاستثمارات، على سبيل المثال الأسهم، السندات، من مختلف البدائل الاستثمارية. وهذه الاستثمارات، هى غالباً ما تواجه مديرى صناديق الاستثمار ، هيئات الائتمان، وشركات التأمين والبنوك. ودالة الهدف هى تعظيم العائد المتوقع، أو تقليل المخاطرة، والقيود فى هذه النوعية من الاستثمارات هى عادة من نوعية الاستثمارات المسموح بها، قوانين الدولة، سياسة الشركة، الحد الأعلى المسموح به من المخاطرة، ... الخ. فلنفترض أن مؤسسة جالوب لصناديق الاستثمار ، وموقعها طوكيو، العاصمة اليابانية، قد تحصلت على 100.000 ين بتحويل سندات صناعية إلى سيولة وتبحث عن فرص الاستثمار لهذه الأرصدة. ولنفترض أن توصيات محللها المالى هى توجيه كل الاستثمارات الجديدة إلى صناعة البترول، صناعة الصلب، أو سندات الحكومة. وعلى الخصوص، فقد تعرف المحلل المالى على خمسة فرص استثمارية وتوقع معدلات عائداتها، كالمبينة بالجدول (8-5).

جدول (8-5) فرص الاستثمار لصندوق استثمار جالوب

الاستثمار	% للعائد المتوقع
1- الأطلنطى للبترول	7.3
2- المحيط الهادى للبترول	10.3
3- الشرق لصناعة الصلب	6.4
4- أوزاكا لصناعة الصلب	7.5
5- سندات حكومية	4.5

وقد وضعت المؤسسة القواعد التاليه للاستثمارات

1- ليس لأى صناعة أن يخصص لها أكثر من 50% من اجمالى الاستثمار الجديد.
2- ألا يقل الاستثمار فى السندات الحكومية عن 25% من استثمار صناعة الصلب.
3- أن الاستثمار فى الاطلنطى للبترول (أعلى عائد وأعلى مخاطرة) لا يمكن أن يزيد عن 60 % من الاستثمارات فى قطاع البترول.

فما هى مكونات محفظة الاستثمار فى ظل السيولة النقدية المستجدة، 100.000 ين؟ (الين هو الوحدة المالية اليابانية)

فللإجابه على هذا السؤال نكون نموذجا من البرمجة الخطية كالاتى. ولنفترض

X_1= الاستثمارات فى الاطلنطى للبترول.

X_2= الاستثمارات فى المحيط الهادى للبترول.

X_3= الاستثمارات فى الشرق للصلب.

X_4= الاستثمارات فى أوزاكا للصلب.

X_5= الاستثمارات فى السندات الحكومية.

ويكون الشكل العام للنموذج كالآتى:

دالة الهدف :

$$\text{Max.} \quad 0.073 X_1 + 0.103 X_2 + 0.064 X_3 + 0.075 X_4 + 0.045 X_5$$

وقيودها

Subject to :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100.000$$ أرصدة متوفرة

$$X_1 + X_2 \leq 50.000$$ حد أقصى للإستثمار البترولى

$$X_3 + X_4 \leq 50.000$$ حد أقصى للإستثمار فى الصلب

$$-0.25 X_3 - 0.25 X_4 + X_5 \geq 0.0$$ حد أدنى للإستثمار فى السندات الحكومية

$$-0.6 X_1 + 0.4 X_2 \leq 0.0$$ قيد الاستثمار فى الأطلنطى للبترول

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0.0$$

وكان الحل الأمثل لتلك المحفظة المالية كالتالى:

الاستثمار	المقدار	العائد السنوى المتوقع
الاطلنطى للبترول	20.000 ين	1460 ين
المحيط الهادى للبترول	30.000	3090
أوزاكا للصلب	40.000	3000
السندات الحكومية	10.000	450
	100.000 ين	8.000 ين

العائد السنوى المتوقع من 8000 ين = 8 %

*

جـ - 2- استراتيجية المزج التمويلى Financial Mix Strategy

وتتضمن اختيار وسائل تمويل مشروعات الشركة، المخزون، عمليات الانتاج ، والأنشطة الأخرى المختلفة . وفى مثالنا سنستعرض كيفية تناول تمويل عملياتنا الإنتاجية. وفى هذا الموقف سيتناول القرار الاستثمارى كم من الانتاج سيُدعَم من الأرصدة المتولدة داخلياً، وكم سيُدعَم من الأرصدة الخارجية.

ستبدأ شركة الصقر للحاسبات الإلكترونية (الجمع والطرح والنسبة) بإنتاج نموذجين جديدين من هذه الحاسبات خلال الثلاثة أشهر القادمة. ولما كان خط الانتاج الجديد يحتاج توسعة لعملية الانتاج الجارى فستحتاج الشركة إلى أرصدة تشغيلية لتغطية نفقات المواد، والعمالة، والبيع خلال فترة الانتاج المبدئى. كما أن العائد من هذا الانتاج لن يتواجد إلا حتى بعد انتهاء هذه الفترة ، ولذلك يجب على الشركة عمل الترتيبات لتدبير نفقات التشغيل المذكورة قبل أن يبدأ الانتاج.

وقد وضعت الشركة جانباً مبلغ 3000 جنيه من الأرصدة الداخلية لتغطية نفقات هذه العملية. فإذا رؤى الحاجة إلى أرصدة إضافية فسيجرى ذلك عن طريق خارجى. وقد عرض بنك محلى تقديم ائتمان قصير الأجل بما لا يزيد عن 10.000 جنيه، وستكون الفائدة خلال فترة القرض 12 % سنوياً على متوسط الكمية المقترضة. وقد اشترط البنك لذلك أن الباقى من الرصيد الذى خصصته الشركة لتلك العملية بالإضافة إلى حسابات أوراق القبض accounts receivables لخط الانتاج الجديد- يجب على الأقل أن يكون ضعف القرض المستخدم مضافاً إليه الفائدة وذلك عند نهاية الفترة المبدئية للإنتاج.

هذا والإضافة إلى القيود المالية الموضوعة على هذه العملية ، فإن هناك طاقة من ساعات العمالة توزعت كالآتى: فقط 2500 ساعة للتجميع، 150 ساعة للتغليف والشحن، خلال تلك الثلاث شهور الإنتاجية. ويظهر الجدول (8-6) التكلفة ، والسعر ، والاحتياجات الزمنية للإنتاج لذلك النوعين من النماذج.

كما وضعت الإدارة قيوداً أخرى لضمان اختبار رد فعل السوق لهذين الناتجين، وذلك بإنتاج على الأقل ، 50 وحدة من النموذج Y وعلى الأقل 25 وحدة من النموذج Z فى تلك الفترة الإنتاجية الأولى .

ولما كانت تكلفة الوحدات المنتجة من الأرصدة المقترضة تتأثر برسوم الفائدة ، فإن هوامش الربح لوحدات النماذج Z , Y الناتجة من تلك الأرصدة المقترضة سيجرى تخفيضها، لذلك فقد كانت المتغيرات للقرارات الاستثمارية كالآتى:

X_1 = وحدات من النموذج Y الناتجة من أرصدة الشركة

X_2 = وحدات من النموذج Y الناتجة من أرصدة مقترضة

X_3 = وحدات من النموذج Z الناتجة من ارصدة الشركة

X_4 = وحدات من النموذج Z الناتجة من أرصدة مقترضة

جدول (8-6) التكلفة ، السعر ، وبيانات، القوى العاملة لشركة الصقر

النموذج	تكلفة الوحدة (مواد خام ونفقات متغيرة أخرى)	سعر البيع	هامش الربح	ساعات العمالة اللازمة للتجميع	ساعات العمالة اللازمة للتغليف والشحن
	.... جنية	....			
Y	50	58	8	12	1
Z	100	120	20	25	2

والسؤال كم سيخفض هامش الربح للوحدات المنتجة من أرصدة مقترضة ؟ وللإجابة على هذا السؤال فيجب أن يُعرف كم من الوقت سيظل القرض قائما؟ نفترض أن كل الوحدات من النموذجين تباع بمجرد انتاجها إلى موزعين مستقلين، وأن متوسط معدل دوران الحسابات القابضة هو ثلاثة أشهر. ولما كانت إدارة الشركة قد قررت أن القرض سيعاد تسديده من أرصدة النواتج المباعة والمموّلة من القرض أى خلال ثلاثة أشهر مؤخراً ، وذلك لكل وحدة من نموذج Y أو Z، فمن هنا فإن هامش الربح لكل وحدة من Y ناتجة من رصيد مقترض سينخفض من 8 جنيهات إلى 6.5 جنيه [8-(50 ج . م × 0.12 × 1\4 سنة)] ، وأن هامش الربح لكل وحدة من Z ناتجة من رصيد مقترض سينخفض من 20 جنيها إلى 17.00 جنيها [20 – (100 جنيه × 0.12 × 1\4 سنة)] ، وبهذه المعلومات نستطيع تكوين دالة الهدف لمشكلة المزج التمويلى للشركة كالآتى:

دالة الهدف

Max. $8X_1 + 6.5X_2 + 20X_3 + 17X_4$

Subject to:

تجميع إنتاج	$12X_1 + 12X_2 + 25X_3 + 25X_4 \le 2.500$
تغليف وشحن	$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 \le 150$
أرصدة داخلية	$50X_1 + 100X_3 \le 3.000$
أرصدة مقترضة	$50X_2 + 100X_4 \le 10.000$
احتياجات نموذج Y	$X_1 + X_2 \ge 50$
احتياجات نموذج Z	$X_3 + X_4 \ge 25$

هذا بالإضافة إلى أن القيد التالى يجب أن تتضمنه القيود لاستيفاء قرض البنك:

(الفائدة + القرض) 2 ≤ حسابات قابضة + cash

ويجب استيفاء هذا القيد عند نهاية المدة. وهذه الحسابات القابضة تقدر بمتوسط ثلاثة شهور، حيث تستخدم العلاقات التالية لاشتقاق تعبيرات رياضية لهذه المعادلة غير المتساوية عند نهاية الفترة.

$3000 - 50 X_1 - 100 X_3 =$ النقد

$58 x_1 + 58 X_2 + 120 X_3 + 120 X_4 =$ حسابات أوراق القبض

$50 X_2 + 100 X_4 =$ القرض

$(0.12 \times ¼$ سنة$) (50 X_2 + 100 X_4) = 1.5 X_2 + 3X_4 =$ الفائدة

ومن ذلك فالقيد الناشىء عن شروط البنك يمكن كتابته كالتالى:

$$3000-50X_1-100 X_3+58 X_1+ 58 X_2+120 X_3+120 X_4 \geq 2 (51.5 X_2+ 103 X_4)$$

OR

$$-8 X_1 + 45 X_2- 20 X_3 + 86 X_4 \leq 3000$$

ويمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية كاملاً كالآتى:

Max. $8 X_1 + 6.5 X_2 + 20X_3+ 17X_4$

Subject to :

$$12 X_1 + 12 X_2 + 25 X_3 + 25 X_4 \leq 2500$$
$$X_1 + X_2 + 2 X_3 + 2 X_4 \leq 150$$
$$50 X_1 + 100 X_3 \leq 3000$$
$$50 X_2 + 100 X_4 \leq 10.000$$
$$X_1 + X_2 \geq 50$$
$$X_3 + X_4 \geq 25$$
$$-8 X_1 + 45 X_2 - 20 X_3 + 86 X_4 + \leq 3.000$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

ويظهر الحل لهذه المشكلة فى الجدول التالى (8-7).

جدول (8-7) الحل الأمثل للمزج التمويلى لإنتاج شركة الصقر

المتغيرات	وحدات	الربح المتوقع
نموذج Y		جنيه
أرصدة مقترضة (X_2)	50	325
نموذج Z		
أرصدة الشركة (X_3)	30	600
أرصدة مقترضة (X_4)	15.7	267
	إجمالى	1192

واحتاج الحل الأمثل للمزج التمويلى إلى استخدام الشركة لكل الأرصدة الداخلية (3000 جنيه) وكمية أزيد قليلاً عن 4000 جنيه من اعتماد الإئتمان المتاح (10.000 جنيه).

*

د- تطبيقات تسويقية Marketing Application

د – 1- اختيار وسيلة الاعلام Media Selection

تهدف هذه التطبيقات إلى مساعدة مديري التسويق فى توزيع بنود ميزانية الإعلان المحددة خلال الوسائل المختلفة. وتشمل وسائل الإعلان الصحف، المجلات، الراديو، التليفزيون، بريد المراسلة المباشرة ... الخ. والهدف النهائي في معظم التطبيقات هو تعظيم درجة الانتشار على المتلقين. والقيود على توزيع الميزانية المقدرة تأتى من سياسات الشركة، واحتياجات العقود، وامكانية الحصول على وسيلة الإعلان.

ولننظر حالة شركة تنمية بحيرة المنتجع الترويجى بلبنان، إذ تقوم بتنمية شاطىء بحيرة ذات ملكية خاصة، وأنها تزاول نشاط بيع ملكيات لغرض الأجازة أو منتجعات الأجازة الأسبوعية. والسوق الأولى لقطع أرض شاطىء البحيرة يشمل العائلات ذات الدخل المتوسط والعالى خلال تطوير 150 كيلو متر من الأرض . وقد تعاقدت الشركة مع شركة النور للدعاية لتصميم حملة إعلامية للمشروع.

وبعد الأخذ فى الاعتبار وسائل الإعلان الممكنة والسوق الذى سيُغطى ، فقد أوصت أوّليا شركة النور بإقتصار الشهر الأول من الإعلان على خمسة مصادر. وعند نهاية هذا الشهر ستقيّم شركة النور إستراتيجيتها بناء على نتائج الشهر. وقد جمعت شركة النور بيانات عن عدد العائلات المحتمل قيامها بالشراء والتى توصلت إليها ، وتكلفة الإعلان ، وأقصى عدد من الأوقات لكل وسيلة إعلان يمكن الحصول عليها ، وعدد الوحدات المتوقع رؤيتها للإعلان فى كل من وسائل الإعلان الخمسة. ويقاس التعرض المتوقع للإعلان ، معبرا عنه بالوحدة المعرّضة exposure unit وهو مقياس حكمى إدارى للقيمة النسبية لكل إعلان فى كل وسيلة إعلان. وهذه القياسات مبنية على خبرة شركة النور فى مجال الإعلان آخذين فى الحسبان عوامل مثل نموذج المتلقين audience profile (العمر ، الدخل ، التعليم، الذين توصّل إليهم) والانطباع image presented وجودة الإعلان quality . وقد جمعت تلك البيانات فى الجدول (8-8).

وقد أمدّت شركة تنمية البحيرة شركة النور بميزانية إعلامية قدرها 30.000 جنيه للحملة خلال الشهر الأول. كما فرضت شركة تنمية البحيرة قيوداً على كيفية توزيع شركة النور لهذه الأرصدة. فعلى الأقل يجب استخدام 10 إعلانات تليفزيونية، وعلى الأقل 50.000 مشترى محتمل يجب الوصول إليهم خلال الشهر. اضافة لذلك ، فلا أزيد من 18.000 جنيه يمكن إنفاقها على الإعلانات التليفزيونية. فما هو اختيار وسيلة الإعلان التى ستوصى بها شركة النور للدعاية والإعلان؟

جدول (8-8) البدائل لوسائل الإعلام لشركة تنمية بحيرة المنتجعات السياحية

	(1) الوسيلة الإعلامية	(2) العدد المحتمل للعائلات المشترية المتوصل إليها	(3) تكلفة الإعلان	(4) أقصى مرات متاحة فى الشهر *	(5) المتوقع من الوحدات المُعرَّضة (وحدة)
			جنيه		
1	تليفزيون الفترة النهارية (1 دقيقة) القناة الأولى	1000	1500	15	65
2	تليفزيون الفترة المسائية (30 ثانية) القناة الأولى	2000	3000	10	90
3	صحيفة الأخبار اليومية (صفحة كاملة الجريدة الصباحية	1500	400	25	40
4	صحيفة الأحد (2\1 صفحة ملونة) طبعة الأحد	2500	1500	4	60
5	الإذاعة 8 صباحا أو 5 مساء . أخبار (30 ثانية) محطة بيروت	300	100	30	30

* أقصى مرات متاحة من وسيلة الإعلام هى إما أقصى عدد من المرات تكرر وسيلة الإعلان (مثلا 4 أيام الأحد لوسيلة الإعلان رقم 4) أو أقصى مرات متاحة ستسمح شركة النور باستخدام هذه الوسيلة الإعلامية.

فالخطوة الأولى لتكوين نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة تبدأ باقتراض:

X_1= عدد مرات استخدام الوقت النهارى للتليفزيون

X_2= عدد مرات استخدام الوقت المسائى للتليفزيون

X_3= عدد مرات استخدام صحيفة الأخبار اليومية

X_4= عدد مرات استخدام صحيفة الأحد

X_5= عدد مرات استخدام الإذاعة

وفى ضوء تعظيم التعرض المتوقع expected exposure. فإن دالة الهدف تكون:

Max.

$$65 X_1 + 90 X_2 + 40 X_3 + 60 X_4 + 20 X_5$$

Supject to:

مرات متاحة من وسيلة الإعلان:

$$X_1 \leq 15$$
$$X_2 \leq 10$$
$$X_3 \leq 25$$
$$X_4 \leq 4$$
$$X_5 \leq 30$$

ميزانية:

$$1500 X_1 + 3000 X_2 + 400 X_3 + 1000 X_4 + 100 X_5 \leq 30.000$$

قيود على التليفزيون:

$$X_1 + X \geq 10$$
$$1500 X_1 + 3000 X_2 \leq 18.000$$

تغطية المتلقى:

$$1000 X_1 + 2000 X_2 + 1500 X_3 + 2500 X_4 + 300 X_5 \geq 50.000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

ويتبين الحل لهذه المشكلة فى الجدول، (8-9). ويود الإشارة إلى أن نموذج اختيار وسيلة الاعلام تحتاج إلى تقييمات شديدة للحصول على مدخلاتها وخاصة التعرض المتوقع، ولكنها وسيلة مقبولة للحصول على البيانات الضرورية لنموذج البرمجة الخطية.

جدول (8-9) خطة الاعلام لشركة تنمية بحيرة المنتجع الترويحى

وسيلة الاعلام	التكرار	الميزانية
		جـنـيه
تليفزيون الفترة النهارية	10	15.000
صحيفة الأخبار اليومية	25	10.000
صحيفة الأحد	2	2.000
الإذاعة	30	3.000
		30.000

إجمالى عدد المتلقين = 61.500

التّعرّض المتوقع = 2370

وقصور آخر فى هذا النموذج هو أنه حتى إذا كان قياس التعرض المتوقع ليس موضوعا للخطأ، إلا أنه لا يوجد ضمان أن تعظيم التعرض المتوقع سيؤدى إلى تعظيم الربح،أو المبيعات، ولكن ذلك لا يعتبر قصوراً فى البرمجة الخطية بل قصوراً فى استخدام مقياس التعرض المتوقع. ومن المؤكد أنه إذا كان فى الإمكان القياس المباشر لتأثير الدعاية على الربح فنستخدم إجمالى الربح كدالة هدف.

هذا ونضيف إلى أنه يجب أن تكون على بينة من أن اختيار نموذج وسيلة الدعاية فى هذه المناقشة لم يشتمل على الاعتبارات التالية:

1-القيمة المخفّضة للتعرض نتيجة الاستخدام المتكرر لوسيلة الإعلام

2-التكلفة المخصومة للإستخدام المتكرر لوسيلة الإعلام

3-تداخل over lap المتلقين من وسائل الإعلام المختلفة

4-التوصية بأوقات الإعلان

*

د – 2 – استراتيجية التسويق Marketing Strategy

تتضمن احدى القرارات المتعلقة باستراتيجية التسويق، التوزيع الأمثل لفريق العاملين فى المبيعات، والجهد الإعلامى. وكما نوقش سابقاً فى اختيار وسيلة الإعلام ، فقد كان من المرغوب فيه عمل هذا القرار بطريقة تؤدى إلى تعظيم الربح أو المبيعات. ومن عدم التوفيق، فنادراً ما تتوفر معلومات كافية لبيان العلاقة بين توزيع طاقم المبيعات والجهد الاعلامى والهدف النهائى لتحقيق الربح. ونستعرض هنا حالة تمكن الشركة من بيان هذه العلاقة ، أى أن قرار استراتيجية التسويق يمكن أن يُتخذ فى ضوء تعظيم الربح.

تقوم شركة سكاى للإتصالات الإلكترونية بإنتاج أنظمة التليفون المحمول التى يمكن استخدامها فى الإتصالات اللاسلكية. ويبلغ مدى الإنتاج الجديد إلى حد 25 كيلو متراً، وهو مناسب للإستخدام فى مبيعات اليخوت، وأنظمة الخدمات. وهذه التطبيقات تمكن أى مكتب من الاتصال بقوة عمل المبيعات فى الميدان ، وكذلك رجال الصيانة .. الخ. وستكون القناة التوزيعية الأولية من خلال موزعى أجهزة الإتصالات الصناعية، إلا أن الشركة تأخذ فى إعتبارها التوزيع من خلال سلسلة وطنية لمحلات الخصم، وموزعى الأجهزة البحرية. والقناتان الأخيرتان تمتازان بالسماح للإنتاج بالوصول إلى الأفراد المهتمين بهذه الهوايات.

ونظراً لاختلاف تكاليف التوزيع والترويج ، فتتباين الأربحية لهذا الناتج تبعاً للبدائل المختارة للتوزيع. هذا بالإضافة إلى أن تقدير الشركة لتكلفة الإعلان ووقت البائع لكل وحدة مباعة سيتباين حسب قنوات التوزيع المختلفة.ولما كانت الشركة تنتج هذه الوحدات حسب الطلب فقط، فإن عدد الوحدات المنتجة هى نفسها عدد الوحدات المباعة. ويلخص الجدول (8-10) البيانات المعدة بواسطة الشركة فيما يختص

بالربح، وتوقعات الجهد الإعلانى وجهد طاقم المبيعات لكل وحدة مباعة. وهذه التقديرات مبنيه على الخبرة السابقة للشركة فى أجهزة التليفون المشابهة.

وقد قررت إدارة الشركة أنه على الأقل يجب أن توزع 100 وحدة من خلال محلات الخصم discount stores خلال الثلاث أشهر القادمة . وكانت ميزانية الدعاية هى 5000 دولار و أن حدا اقصى من 1200 ساعة عمل من طاقم المبيعات سيكون متاحا خلال الفترة الجارية من الخطة ، هذا بالإضافة إلى أن الطاقة الإنتاجية هى 600 وحدة.

وتواجه الشركة مسئولية إعداد خطة تسويقيه مربحة بقرارات قائمة على الآتى:

1-كم وحدة ستُنتج وكيف ستوزع على قطاعات السوق الثلاث market segments ؟

2-كم من الإعلان سيوجه إلى هذه القطاعات ؟

3-كيف ستوزع جهود طاقم المبيعات بين أجزاء السوق الثلاث؟

وفى سبيلنا لتكوين برمجة خطية لهذه المشكلة ، نقدم التعريفات التالية:

X_1 = الوحدات المنتجة للسوق الصناعى

X_2 = الوحدات المنتجة لسوق محلات الخصم

X_3 = الوحدات المنتجة للسوق البحرى

جدول (8-10) الوقت، التكلفة، البيانات الزمنية لشركة الاتصالات الالكترونية

الموزع	الربح لكل وحدة مباعة	تقدير متوسط مجهود الدعاية لكل وحدة مباعة	تقدير مجهود قوة طاقم المبيعات لكل وحدة مباعة (ساعات)
	.... دولار		
صناعى	90	10	2.5
محلات لخصم	70	18	3.0
بحرى	84	8	3.0

ويمكن عرض دالة الهدف والقيود كما يلى:

دالة الهدف :

Max. $90 X_1 + 70 X_2 + 84 X_3$

S.t: $10 X_1 + 18 X_2 + 8 X_3 \leq 5000$ ميزانية الدعاية

$2.5 X_1 + 3 X_2 + 3 X_3 \leq 1200$ قوة عمل المبيعات المتاحة

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 600$ الطاقة الإنتاجية

$X_2 \geq 100$ الحد الأدنى للحجم الموجه لمحلات الخصم

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

ويشاهد الحل لهذه المشكلة فى الجدول (8-11). وقد يمدنا تحليل الحساسية ببعض المعلومات الإضافية التى يحتاجها مدير التسويق، وعلى الخصوص أسعار الظل للثلاث عناصر الأولى حيث كانت 6 ، 12 وصفر. ومن معلوماتنا أنه عندما يكون سعر الظل لمتغير متاح Slack صفراً فهذا يعنى أن زيادة قيمة الجانب الأيمن للقيد لهذا المتغير المتاح لا تأثير له على الربح. ونستطيع أن نقول أن الطاقة الإنتاجية لا تأثير لها على الربح. وحقيقة القول فإن المتغير المتاح مع هذا القيد أشار إلى وجود طاقة إنتاجية زائدة قدرها 160 وحدة. أما أسعار الظل ذات القيمة الغير صفرية فهى تعنى أقصى إستخدام متاح لموارد الإعلان وطاقم عمل المبيعات. وتؤكد النتائج بالجدول (8-11) هذا التحليل.

جدول (8-11) أستراتيجية التسويق لتعظيم الربح لشركة الاتصالات الالكترونية

القطاع السوقى	الحجم	التوزيع الاعلانى	توزيع طقم عمالة المبيعات (ساعات)
		دولار	
صناعى	240	2400	600
محلات خصم	100	1800	300
بحرى	100	800	300
الاجمالى	440	5000	1200
		توقعات الربح = 37.000 دولار	

وتعكس قيم أسعار الظل القيمة الحدية للوحدة الإضافية من ميزانية الإعلان، وجهد قوة عمل المبيعات. فالوحدة الإضافية من ميزانية الإعلان تضيف ربحاً قدره 6 دولارات بينما بالنسبة لجهد قوة العمل فتضيف قيمة كامنة قدرها 12 دولاراً. ويمكن للمدير اعتبار إمكانية الحصول على المورد الإضافى طالما أن تكلفة هذه الزيادة أقل من الفوائد الممكنة. ولكن باستمرارنا فى زيادة استخدام هذه الموارد، فستزداد المبيعات وتصبح الطاقة الإنتاجية مكلفة، وأن أى زيادة فى الإعلان وجهود المبيعات لن يكون لها قيمة .

*

هـ- تطبيقات ادارية Managment Applications

جدولة الإنتاج Production Scheduling

تساعد مشاكل جدولة الإنتاج ، المديرين فى إيجاد جدولة للإنتاج بأقل تكلفة اقتصادية، وذلك لناتج واحد أو عدة نواتج خلال العديد من الأوقات مثل الأسابيع، والشهور .. الخ. فعلى المدير تحديد مستويات الإنتاج التى تسمح للشركة مقابلة احتياجات الطلب،أخذا فى الاعتبار القيود على الإنتاج، والعمالة، وفراغات التخزين، وفى نفس الوقت يرغب فى تدنية التكاليف الكلية لتنفيذ هذه المهمة.

وفى هذه المشاكل يجب أن يوضع جدول الإنتاج للشهر الجارى ثم ثانيا للشهر التالى، ثم للشهر بعد ذلك، وهكذا. وعندما ينظر مدير الإنتاج إلى المشكلة شهريا، سيجد أنه بينما تتغير الطلبات على منتجاته

فإن أوقات الإنتاج، طاقات الإنتاج، والقيود على فراغات التخزين.. الخ تبقى تقريباً على ما هي عليه، أي أنه يجابه حلول نفس المشكلة التي تناولها في الشهور الماضية. وبهذا فإن تكوين برنامج خطي قد يكون له تطبيقات معادة.

فلننظر إلى شركة أكتا فون للإلكترونيات التي تنتج نوعين مختلفين من المركبات الإلكترونية لشركة كبرى لتصنيع محركات الطائرات. وتخطر شركة الطائرات شركة أكتا فون كل ربع سنة بالاحتياجات الشهرية للمكونات المطلوبة خلال الثلاث أشهر التالية. ويشير الجدول (8-12) إلى هذه الطلبات للثلاث أشهر التالية.

جدول (8-12). طلبات احتياجات الثلاث أشهر إلى شركة أكتا فون

البيان	إبريل	مايو	يونيو
	الأشهر		
المكوّن أ	1000	3000	5000
المكوّن ب	1000	500	3000

بعد تناول أمر الإنتاج، ومن ثم فعلى قسم مراقبة الإنتاج القيام بعمل خطة إنتاج لثلاثة أشهر. ولما كان مدير الإنتاج يفضل مستويات الطلب الثابت (مثل توازن حمل العمل، والاستخدام الثابت Constant للآلات والعمالة، فقد يرى المدير الإنتاج بمعدل ثابت شهرياً للثلاث أشهر، أي إنتاج 3000 وحدة شهرياً للمكون (أ) ، 1500 وحدة شهرياً للمكون (ب) ، ولكن لماذا لا يتبع هذا الجدول؟

وبينما يكون هذا الجدول المقترح أكثر جاذبية لقسم الإنتاج، إلا أنه لايكون مرغوبا فيه من وجهة نظر التكلفة الإجمالية، حيث يتجاهل تكاليف التخزين. فلننظر إلى مستويات التخزين المنتظرة التي تنتج عن تطبيق هذه الفكرة من جدولة الإنتاج، شكل (8-3).

شكل (8-3) مستويات الإنتاج المنتظرة تحت جدول ثابت من معدلات الإنتاج

	31 مايو		30 إبريل	
2000 وحدة	4 3 2 1	2000 وحدة	4 3 2 1	المكوّن (أ)
1500 وحدة	3 2 1	500 وحدة	1	المكوّن (ب)

وبالنظر إلى جدولة الإنتاج بهذه الطريقة فإن هذا سيقود إلى مستويات عالية من المخزون. وعندما نأخذ فى الاعتبار التكلفة الغير عاملة Idle والتى خصصت لرأس المال وفراغ التخزين، فإن جدولا كهذا يمدنا بمستويات منخفضة من المخزون والتى قد تكون مرغوبة اقتصاديا.

وعلى الجانب الآخر المتطرف من جدول معدل الإنتاج الثابت، نجد المدخل إلى الإنتاج لمقابلة الطلب. وبينما يمحو هذا الجدول مشكلة تكلفة الاحتفاظ بالمخزون، فإن التذبذب الكبير فى مستوى الإنتاج الشهرى قد يسبب بعضاً من مشاكل خطيرة فى الإنتاج والتكاليف. فعلى سبيل المثال، فالطاقة الإنتاجية يجب أن تكون متاحة لمقابلة ذروة الطلب الكلى 8000 وحدة فى شهر يونيو، وما لم يكن هناك جدولة لإنتاج مكونات أخرى على نفس خط الإنتاج فى إبريل ومايو فستكون هناك طاقة جوهرية غير مستخدمة واستخدام أقل للآلات فى هذه الأشهر. هذا بالإضافة إلى أن التباينات الكبيرة فى الإنتاج ستحتاج إلى تعديلات أساسية فى العمالة أو حدوث مشاكل تدريبية أو تغيير فى العمالة. لذلك فإن أحسن جدولة للإنتاج هى التى تجمع ما بين المستوى الثابت للمخزون العالى والتطرفات فى متغير الاستفادة ذى المعدل المنخفض.

ولذلك فإن على جدول الإنتاج التعرف على التكاليف التالية:

1- تكاليف الإنتاج

2- تكاليف التخزين

3- التغير فى تكاليف مستوى الإنتاج

ولتكوين نموذج البرنامج الخطى فسنستخدم دليلين لمتغيرات القرار فى مشكلتنا. وسيمثل الدليل الأول رقم الناتج، والدليل الثانى رقم الشهر. فمثلاً X_{im} تمثل حجم الإنتاج بالوحدات للناتج (i) فى الشهر (m). وهنا i = 1 , 2 ، m =1,2,3 ، i = 1 تشير إلى المكون (أ) ، i = 2 تشير إلى المكون (ب).

فإذا كانت تكلفة انتاج المكون (أ) 20 جنيهاً للوحدة، وللمكون (ب) 10 جنيهات للوحدة، فإن تكلفة إنتاج الوحدة فى دالة الهدف ستصبح:

← (القراءة هكذا)

$$\text{تكلفة الإنتاج} = 20X_{11} + 20X_{12} + 20X_{13} + 10X_{21} + 10X_{22} + 10X_{23} \quad \ldots\ldots (1)$$

ويلاحظ أن تكلفة انتاج الوحدة هى نفسها كل شهر، وبهذا لا نحتاج لتضمين تكاليف الإنتاج فى دالة الهدف، بمعنى أنه مهما تغير جدول الإنتاج الذى أختير فإن التكلفة الكلية للإنتاج ستبقى كما هى. أما فى الحالات التى يتوقع فيها تغير تكلفة الإنتاج كل شهر فيجب تضمين تلك التكلفة فى دالة الهدف. وفى مشكلة شركة اكتا فون فقد اخترنا تضمينهم ، أى أن قيمة دالة الهدف ستتضمن كل التكاليف المصاحبة للمشكلة.

وبالمثل سيجرى تضمين تكاليف المخزون فى نموذجنا ، باستخدام دليلين. فمثلاً S_{im} تعنى مستوى المخزون من الناتج (i) عند الشهر (m). وقد قررت الشركة ان تكلفة المخزون عبارة عن 1.5% من

قيمة الناتج، بمعنى 0.30 جنيه لكل وحدة من المكوّن (أ) و 0.15 جنيه لكل وجدة من المكوّن (ب) . وهنا نُقِض فرض شائع من فروض البرامج الخطية، فقد أُفترض أن نهاية المخزون الشهرية هى تقريب مقبول لمتوسط مستويات المخزون خلال الشهر، وتحت هذا الفرض فإن تكلفة المخزون كجزء من دالة الهدف ستكتب كالتالى: ⟵ (القراءة هكذا)

$0.30\ s_{11} + 0.30\ S_{12} + 0.30\ S_{13} + 0.15\ S_{21} + 0.15\ S_{22} + 0.15\ S_{23}$ = تكلفة المخزون ....(2)

ولكى تُتضمن التكاليف التى ترجع إلى تذبذب مستويات الإنتاج إلى دالتنا فسنحتاج إلى تعريفات إضافية لمتغيرات القرارات.

I_m = الزيادة فى ساعات العمالة فى الإنتاج خلال الشهر (m)

D_m= النقص فى ساعات العمالة فى الإنتاج خلال الشهر (m)

وبعد تقدير تأثير الاستغناء عن العمالة ، ومعدلات ترك العمالة للعمل، وتكلفة التدريب المصاحبة لإعادة توزيع العمالة، والتكاليف الأخرى المصاحبة لإحتياجات تذبذب القوى العاملة، فقد قدرت شركة اكتا فون أن التكلفة المصاحبة للزيادة فى العمالة هى 10 جنيهات \ ساعة عمل، بينما التكلفة المصاحبة للنقص هى 2.5 جنيه\ ساعة عمل. وبذلك يكون الجزء الثالث من دالة الهدف كما يلى: ⟵ (القراءة هكذا)

$10I_1 + 10\ I_2 + 10\ I_3 + 2.5\ D_1 + 2.5\ D_2 + 2.5\ D_3$ = تكلفة تذبذب الإنتاج .... (3)

وفى بعض المشاكل الأخرى لجداول الإنتاج فقد يعبر عن هذه التكاليف بساعات عمل الآلات أو بالكمية الكلية الناتجة. وبالتالى تصبح دالة الهدف تتكون من الثلاث معادلات السابقة (1) ، (2) ، (3).

دالة الهدف :

$$20X_{11} + 20\ X_{12} + 20\ X_{13} + 10\ X_{21} + 10X_{22} + 10X_{23}$$
$$+ 0.30\ S_{11} + 0.30\ S_{12} + 0.30\ S_{13} + 0.15\ S_{21} + 0.15\ S_{22} + 0.15S_{23}$$
$$+ 0.10\ I_1 + 0.10\ I_2 + 0.10\ I_3 + 2.5\ D_1 + 2.5\ D_2 + 2.5D_3$$

وعند النظر إلى القيود، فيجب أن تضمن أولا أن جدول الإنتاج يفى بطلب العملاء. ولما كانت الوحدات المشحونة يمكن أن تأتى من إنتاج الشهر الحالى أو من المخزون المرحّل من فترات سابقة، فسيكون عندنا الاحتياجات الأساسية التالية : ⟵ (القراءة هكذا)

(الطلب لهذا الشهر) ≥ (الإنتاج الجارى) + (نهاية المخزون من الشهر الماضى)

ولما كان الفرق بين الجانب الأيسر والجانب الأيمن هو كمية نهاية المخزون فى نهاية هذا الشهر، فإن الطلب يعدل كالآتى: ⟵ (القراءة هكذا)

الطلب لهذا الشهر = [نهاية المخزون لهذا الشهر] -[الإنتاج الجارى] + [نهاية المخزون من الشهر الماضى]

وليفترض أن المخزون فى بداية فترة جدولة الثلاث شهور هو 500 وحدة للمكوّن (أ) و 200 وحدة للمكوّن (ب). وبالرجوع إلى جدول (8-12) فإن الطلب على الناتجين فى الشهر الأول (ابريل) هو 1000 وحدة، والقيود لمقابلة الطلب فى الشهر الأول تصبح:

$$500 + X_{11} - S_{11} = 1000$$

$$200 + X_{21} + S_{21} = 1000$$

وبتحويل الثوابت إلى الجانب الأيمن من المعادلة، تصبح :

$$X_{11} - S_{11} = 500$$

$$X_{21} - S_{21} = 800$$

وبالمثل فالقيود على الطلب للناتجين فى الشهر الثانى والثالث يمكن كتابتها كالتالى:

الشهر الثانى:

$$S_{11} + X_{12} - S_{12} = 3000$$

$$S_{21} + X_{22} - S_{22} = 500$$

الشهر الثالث:

$$S_{12} + X_{13} - S_{13} = 5000$$

$$S_{22} + X_{23} - S_{23} = 3000$$

وكانت الشركة تقرر أن المستوى الأدنى للمخزون عند نهاية فترة الثلاث شهور يجب أن لا يقل عن 400 وحدة من المكوّن (أ)، ولا يقل عن 200 وحدة من المكوّن (ب) فيجرى إضافة هذين القيدين:

$$S_{13} \geq 400$$

$$S_{23} \geq 200$$

ولنفترض أن عندنا المعلومات الإضافية التالية عن الإنتاج، القوة العاملة، والسعة التخزينية كما يبينها الجدول (8-13).

جدول (8-13) الآلات ، القوى العاملة، السعة التخزينية لشركة أكتافون

الشهر	طاقة الآلات (ساعات)	طاقة العمالة (ساعات)	السعة التخزينية (متر مربع)
ابريل	400	300	10.000
مايو	500	300	10.000
يونيو	600	300	10.000

كما يبين الجدول (8-14) الاحتياجات من الآلات ، القوى العاملة، السعة التخزينية

جدول (8-14) احتياجات المكونات من طاقات الآلات، والقوى العاملة، والسعة التخزينية

البيان	الآلات (ساعة \ وحدة)	القوى العاملة (ساعة \ وحدة)	السعة التخزينية (متر مربع \ وحدة)
المكون (أ)	0.10	0.05	2
المكون (ب)	0.08	0.07	3

وحتى تنعكس هذه القيود،ففيما يلي القيود الضرورية:

طاقة الآلات

الشهر الأول (1) $0.10\ X_{11} + 0.08\ X_{21} \leq 400$

الشهر الثاني (2) $0.10\ X_{12} + 0.08\ X_{22} \leq 500$

الشهر الثالث (3) $0.10\ X_{13} + 0.08\ X_{23} \leq 600$

طاقة العمالة

الشهر الأول (1) $0.05\ X_{11} + 0.07\ X_{21} \leq 300$

الشهر الثاني (2) $0.05\ X_{12} + 0.07\ X_{22} \leq 300$

الشهر الثالث (3) $0.05\ X_{13} + 0.07\ X_{23} \leq 300$

السعة التخزينية

الشهر (1) $2S_{11} + 3\ S_{21} \leq 10.000$

الشهر (2) $2S_{12} + 3\ S_{22} \leq 10.000$

الشهر (3) $2S_{13} + 3\ S_{23} \leq 10.000$

وأخيراً هناك مجموعة من القيود يجب أن تضاف. فمن الضروري أن يُضمن أن D_m ، I_m ستعكس الزيادة أو النقص في عدد ساعات العمالة المستخدمة في الإنتاج في الشهر (m). ولنفترض أن عدد ساعات العمالة المستخدمة في هذين المكونين في شهر مارس (الشهر الذي يسبق بداية فترة التخطيط) كانت 225. ونستطيع إيجاد كمية التغير في مستوى العمالة لشهر ابريل من العلاقة:

التغير= استخدام مارس - استخدام إبريل ← (القراءة هكذا)

$$\text{التغير} = 225 - (0.05\ X_{11} + 0.07\ X_{21})$$

وهذا التغير قد يكون موجباً أو سالباً (زيادة أو نقص). ونستطيع عرض هذا القيد عن شهر ابريل:

$$(0.05\ X_{11} + 0.07\ X_{21}) - 225 = I_1 - D_1$$ ← (القراءة هكذا)

وبالطبع لا نستطيع أن يتواجد زيادة ونقص في نفس الفترة، فقط أيهما سيكون صفراً.فإذا كان ابريل يحتاج إلى 245 ساعة عمل، فإن $I_1 = 20$ ، $D_1 = 0.$ ، وإذا كان ابريل يحتاج فقط 175 ساعة عمل ،

فإن $I_1 = 0$, $-D_1 = -50$ أى أن $D_1 = 50$. وهذه الطريقة هى لبيان التذبذب فى هذين المتغيرين ولو أن البرنامج الخطى سيتعامل معهما كقيم غير سالبة، إلا أننا نستطيع عرضها بالموجب والسالب. وباستخدام ذلك المدخل لحساب الأشهر التالية(دائما يطرح مستوى ساعات الشهر الماضى من الشهر الجارى)، فإن القيود على الشهرين الثانى والثالث هى: ⟵ (القراءة هكذا)

$$I_2 - D_2 = (0.05\ X_{12} + 0.07\ X_{22}) - (0.05\ X_{11} + 0.07\ X_{21})$$
$$I_3 - D_3 = (0.05\ X_{13} + 0.07\ X_{23}) - (0.05\ X_{12} + 0.07\ X_{22})$$

وبوضع الثوابت على الجانب الأيمن فإن القيود الثلاثة تصبح كالآتى:

$$0.05\ X_{11} + 0.07\ X_{21} - I_1 + D_1 = 225$$
$$-0.05\ X_{11} - 0.07\ X_{21} + 0.05\ X_{12} + 0.07\ X_{22} - I_2 + D_2 = 0$$
$$-0.05\ X_{12} - 0.07\ X_{22} + 0.05\ X_{13} + 0.07\ X_{23} - I_3 + D_3 = 0$$

وقد أظهرت مشكلتنا 18 متغيراً، 20 قيداً للبرمجة الخطية، ولو أن لدينا ناتجين وجدولة إنتاج لثلاثة أشهر. وقد تعرضنا فقط لآلة واحدة، ونوعية واحدة من العمالة،ونوعية واحدة من التخزين. أما فى المشاكل الواقعية فقد تجابه بالعديد من الآلات ، ودرجات من العمالة، والعديد من مساحات التخزين. ومن هنا فإنك ستبدأ فى التحقق كيف يصبح البرنامج الخطى للإنتاج كبيراً جداً. وللتغلب على ذلك، فهناك من الطرق لتقليل عدد المتغيرات وكذلك القيود حتى يسهل حل البرنامج. ولشركة أكتا فون فنستطيع تقليل عدد المتغيرات كالآتى: ⟵ (القراءة هكذا)

[جميع المشحون والطلبات بما فيها الشهر الحالى] - [جميع الإنتاج بما فيه الإنتاج الجارى] + [المخزون فى بداية فترة التخطيط] = [نهاية المخزون لشهر معين]

فللمكوّن (أ) :

$$S_{11} = 500 + X_{11} - 1000 = X_{11} - 500$$
$$S_{12} = 500 + X_{11} + X_{12} - 1000 - 3000 = X_{11} + X_{12} - 3500$$
$$S_{13} = 500 + X_{11} + X_{12} + X_{13} - 1000 - 3000 - 5000 = X_{11} + X_{12} + X_{13} - 8500$$

وللمكوّن (ب)

$$S_{21} = X_{21} - 800$$
$$S_{22} = X_{21} + X_{22} - 1300$$
$$S_{23} = X_{21} + X_{22} + X_{23} - 4300$$

ونستطيع الآن العودة إلى دالة الهدف والقيود، ولكل متغير مخزونى S_{im} ليستبدل بالتعبير المناسب من أعلى. وهنا سنجد الدالة والقيود مكونة من D_m ، I_m ، X_{im} وضغطت مشكلتنا إلى 12 متغير، 20 قيد، أى عدد المتغيرات بنسبة 33 %. ويظهر الحل الكامل لهذه المشكلة فى الجدول (9-15).

جدول (9-15) الحل الأمثل للإنتاج، ساعات العمالة، سياسة المخزون لشركة أكتا فون

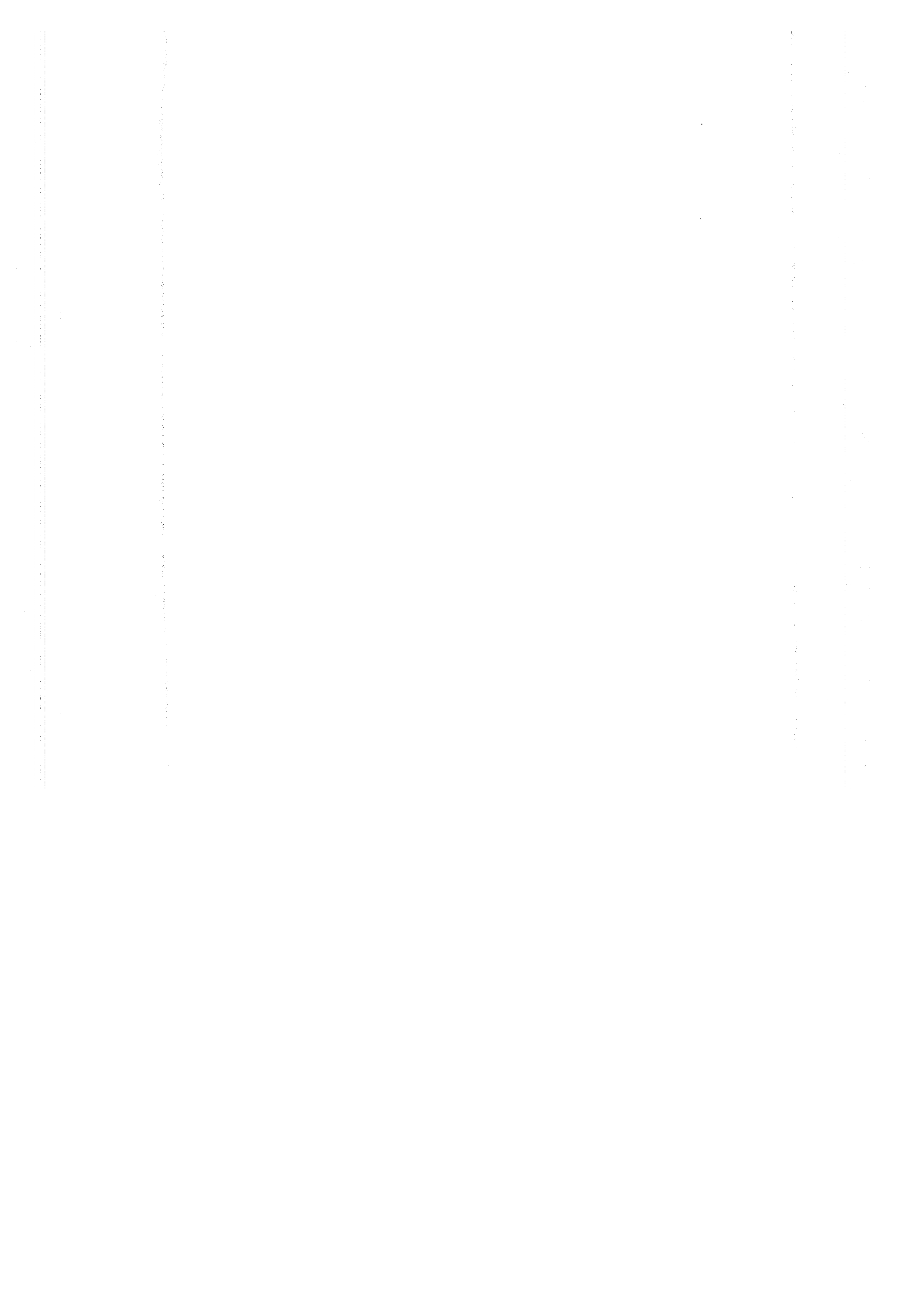
الجـــدول	ابريـــل	مـــايـــو	يـــونـيـــو
الإنتاج			
المكوّن (أ)	500	3050	5350
المكوّن (ب)	2858	1642	-
ساعات العمالة	225	267.5	267.5
المخزون			
المكوّن (أ)	-	50	400
المكوّن (ب)	2058	3200	200
التكلفة الكلية (تشمل الإنتاج، المخزون، ساعات العمالة) = 224,378 جنيه			

والنظرة الأولى تعطى انطباعا فى تباين جدولة الإنتاج، ولكن دعنا نفحص توصيات الحل. كانت تكلفة المخزون للمكوّن (ب) نصف تكلفة (أ) ، لذلك نتوقع وجود المكوّن (ب) فى المخزون بينما المكوّن (أ) الأكثر تكلفة يُنتج عند طلبه.

ولكن لماذا يوصى بإنتاج ما يربو عن 2800 وحدة من المكوّن (ب) فى ابريل حينما على الأقل بعض من الوحدات لا يمكن شحنها حتى يونيو؟ والإجابة على ذلك يدللها المنطق، فإذا تذكرنا أن قوة مستوى ساعات العمالة وقدرها 225 ساعة عمل قد استخدمت فى مارس، والطلب فى شهر ابريل يميل إلى التقليل من ساعات العمل، ولكن من الطلبات فى شهرى مايو فإن الشركة ستلجأ إلى إعادة العمالة أو إضافة عمالة فى الأشهر الأخيرة. وفى الحقيقة فالنموذج يسهّل احتياجات العمالة، وبدون التوصية بوجود تذبذبات فى العمالة المكلّفة، فإن نموذج البرمجة الخطية يشير إلى أنه من الأرخص المحافظة على مستوى عال نسبى من الإنتاج فى ابريل حتى ولو كان ذلك يعنى زيادة تكلفة المخزون للمكوّن (ب)، وإن الاحتفاظ بقوة عمالة ابريل عند 225 ساعة عمل يعنى أن التغير الوحيد فى قوة العمل سيكون 42.5 ساعة عمل زيادة فى مايو، وهذا المستوى سيستمر خلال شهر يونيو.

**

الملحـــــق



تمـــرينـــات

1- عـــلائـــق Feed: استوجب الأمر أن يقرر أحد مربى الماشية تحديد كمية العلف التى عليه شراءها والتى ستدنى التكاليف وتقابل احتياجات التغذية الخاصة. وستتكون العليقة من خمس حبوب تحتوى على المكونات التالية لكل رطل علف ، (الرطل = 0.44 ك . جم) :

العليقة	التكلفة $ \ رطل	المحتويات					
		A	B	C	D	E	F
1	0.05	2.0	3.1	4.0	1.6	0.8	0.2
2	0.02	0.4	0.9	3.0	2.1	1.4	6.2
3	0.03	1.8	1.2	0.5	0.1	2.3	1.2
4	0.03	0.0	0.0	3.1	2.0	2.5	0.8
5	0.04	1.6	0.7	0.0	1.5	2.1	0.7

وكان الحد الأدنى لكل مكوّن من المحتويات 60 رطل \ شهر من A ، 40 رطل \ شهر من B ، 52 رطل \ شهر من C، 38 رطل \ شهر من D ، 39 رطل \ شهر من E ، 47 رطل \ شهر من F. ويتواجد شهريا فقط 15 رطل من العليقة 2 ، 20 رطل من العليقة 3. ويمكن شراء كميات غير محدودة من العلائق 1 ، 4 ، 5. باستخدام البرامج الخطية قدّر الكميات من العلائق الخمسة التى ستشترى شهريا لمقابلة احتياجات مربى الماشية بأقل التكاليف.

2- مخـــاليط أغذيـــة التســـالى : snack : يتضـمن مخـزون شـركة كورونـا 300 رطـل مـن الفـول السودانى ، 150 رطل من البرتزل الصغيرة ، 200 رطل من الزبيب، 75 رطل من المارش مالو الصغير. وتقوم الشركة بتغليف وتوزيع مخاليط أغذية التسالى التالية:

أ – عبوات فول سودانى بسعر 0.38 $ لكل عبوة صفيح زنة رطل.

ب – تسالى محمصة وتتكون من 50% فول سودانى ، 20% برتزل ، 30% زبيب، بسعر 0.68 $ لكل عبوة صفيح زنة رطل.

جـ - مخلوط المبروك ويتكون من 35% فول سودانى، 15 % برتزل ، 35% زبيب ، 15 % مارش مالو صغير، بسعر 0.86 $ لكل عبوة صفيح زنة رطل.

أوجد الكمية لكل من نوع المنتجات الثلاثة التى ستخلط وتباع لتحقق تعظيما للربح. أكتب الحل فى صورة مذكرتين، الأولى إلى المشرف على الإنتاج شارحا له ما يجب إعداده. والمذكرة الثانية إلى مدير المبيعات بخصوص حصص المبيعات.

3- **مخاليط الياميش Nut:** يتواجد في مخزون شركة الياميش المقرمش 200 رطل من اللوز المدخن 150 رطل من عين الجمل، 100 رطل من الفستق، 100 رطل من البكان. وتنتج الشركة ثلاث منتجات مختلفة ، كلها في عبوات صفيح زنة رطل.

أ- اللوز المدخن بسعر 0.55 $ لكل عبوة صفيح.

ب- مخلوط ياميش حلو يتكون من 35% لوز مدخن ، 40% عين جمل، 5% فسق، 20% بكان ، بسعر 0.69 $ لكل عبوة صفيح.

جـ- مخلوط ممتاز يتكون من 55% لوز مدخن ، 10% عين جمل، 35% بكان، بسعر 0.89 $ للعبوة الصفيح.

ما هي الكميات من كل من المنتجات الثلاث التي ستعظم إيراد الشركة و بالاستفادة من الحل الأمثل والحل الازدواجي dual ، جهز تقريرا للجنة الميزانية.

4- **المايونيز الاقتصادى:** يأمل أحد مصنعي المايونيز في انتاج نوع جديد اقتصادى، ويقرر أن يكون المركب قاصرا على الزيت ، صفار البيض ، الملح ،الخل، المستردة، والماء، مع وضع القيود التالية على تلك المكونات:

أ- تتراوح كمية الزيت ما بين 65 % - 80 % ، 25 % من صفار البيض يعامل كمكوّن زيتي.

ب- تتباين كمية صفار البيض ما بين 6.5 % و 8% .

جـ- لا يزيد المكوّن المائي عن 0.8 %. ونظراً لاستخدام صفار البيض المملح في تحضير المركب الإقتصادى ، فإن 1\10 من كمية صفار البيض تُحسب كملح.

د- الخل بحموضة 10% ، يمكن أن يتباين المحتوى الحامضي ما بين 0.2 – 0.5 % من الوزن الكلي للمركب الإقتصادى.

هـ- كل الخل ونصف صفار البيض هو رطوبة ، ويمكن لمحتوى الرطوبة أن يتباين ما بين 12 % و 18 %.

و- ألا يزيد محتوى الرطوبة أو يساوى 50 ضعفاً المحتوى الحامضي.

ز- ألا يزيد المحتوى الزيتي أو يساوى 12 ضعفا لمحتوى صفار البيض.

ح- يمكن أن يتباين دقيق المستردة ما بين 0.25 % و 1.0 %.

وأن تكلفة كل من المكونات السابقة هي كالآتي:

المكوّن	التكلفة ($ \ رطل)		
الزيت	0.58	الخل	0.26
صفار البيض	0.93	المستردة	0.71
الملح	0.03		

أوجد التكلفة الدنيا لهذا المركّب، واكتب الحل في صورة تعليمات إلى مشرف الإنتاج.

5- **النقل** Transportation :هناك مصنع عليه أن ينقل سلعا من 3 مصانع إلى 5 مستودعات. والمصانع لديها 8 ، 10 ، 15 وحدة سلعية متاحة ، وتطلب المستودعات 6 ، 6 ، 8 ، 7 وحدة سلعية. وكانت تكلفة شحن الوحدة السلعية من المصنع 1 إلى المستودعات 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هى 19 $ ، 17 $ ،14 $ ، 15$، 18$ على التوالى. وكانت تكلفة شحن الوحدة السلعية من المصنع 2 إلى المستودعات 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هى 14$ ، 13$ ، 12$ ، 20$ ، 16$ على التوالى. وكانت تكلفة شحن الوحدة السلعية من المصنع 3 إلى المستودعات 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هى 17$ ، 18$ ، 12$ ، 14$ ، 15$ على التوالى .
أعرض هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى، والحل لتدنية تكاليف الشحن.

6- **الخبز** Bread : مخبز لديه 3 وحدات إنتاجية، وله نشاط أخر فى إنتاج خبز خاص بكميات وبتكلفة بينهما الجدول التالى:

الوحدة الإنتاجية (المصنع)	عدد الأرغفة \ أسبوع	التكلفة $ \ رغيف
مدينة نيوبورت (نيوجرسى)	400	0.25
مدينة باترسون	300	0.30
مدينة نيوآرك	450	0.35

والشركة لديها عقد مع إحدى سلاسل الفنادق، وكانت الطلبات لكل من هذه الفنادق حسب موقعها مبيناً فى الجدول التالى:

الفندق فى:	الطلب (رغيف \ أسبوع)
1- مدينة نيويورك	350
2- مدينة بريدج بورت	300
3- مدينة بلانفيل	100
4- مدينة بوكيبسى	250
5- موريسون	100

وكانت تكلفة نقل الرغيف من الوحدة الإنتاجية (المصنع) لكل فندق كالتالى:

الوحدة الإنتاجية (المصنع) فى:	الفندق ($ \ رغيف)				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
نيوبورت	0.05	0.03	0.08	0.02	0.07
بارسون	0.02	0.06	0.03	0.10	0.03
نيوآرك	0.02	0.07	0.01	0.11	0.02

والمطلوب إعداد هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتقليل تكلفة الإنتاج والتوزيع.

7- تمتلك شركة الملح ثلاثة مناجم للملح، وأربعة وحدات إنتاجية لتصنيعه. كانت الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع الأول 200 طن، والمصنع الثانى 250 طن، والمصنع الثالث 300 طن. ويستطيع المصنع الأول تصنيع 190 طن يوميا بحد أدنى، والمصنع الثانى بحد أدنى 250 طن، والمصنع الثالث بحد أدنى 150 طن يوميا. وكانت تكلفة نقل الطن من كل منجم إلى كل مصنع كالآتى:

المصنع	تكلفة نقل الطن من المنجم إلى كل مصنع		
	(1)	(2)	(3)
1	$ 1.3	1.5	1.9
2	2.1	1.0	0.9
3	3.0	0.8	1.6
4	1.5	1.2	2.2

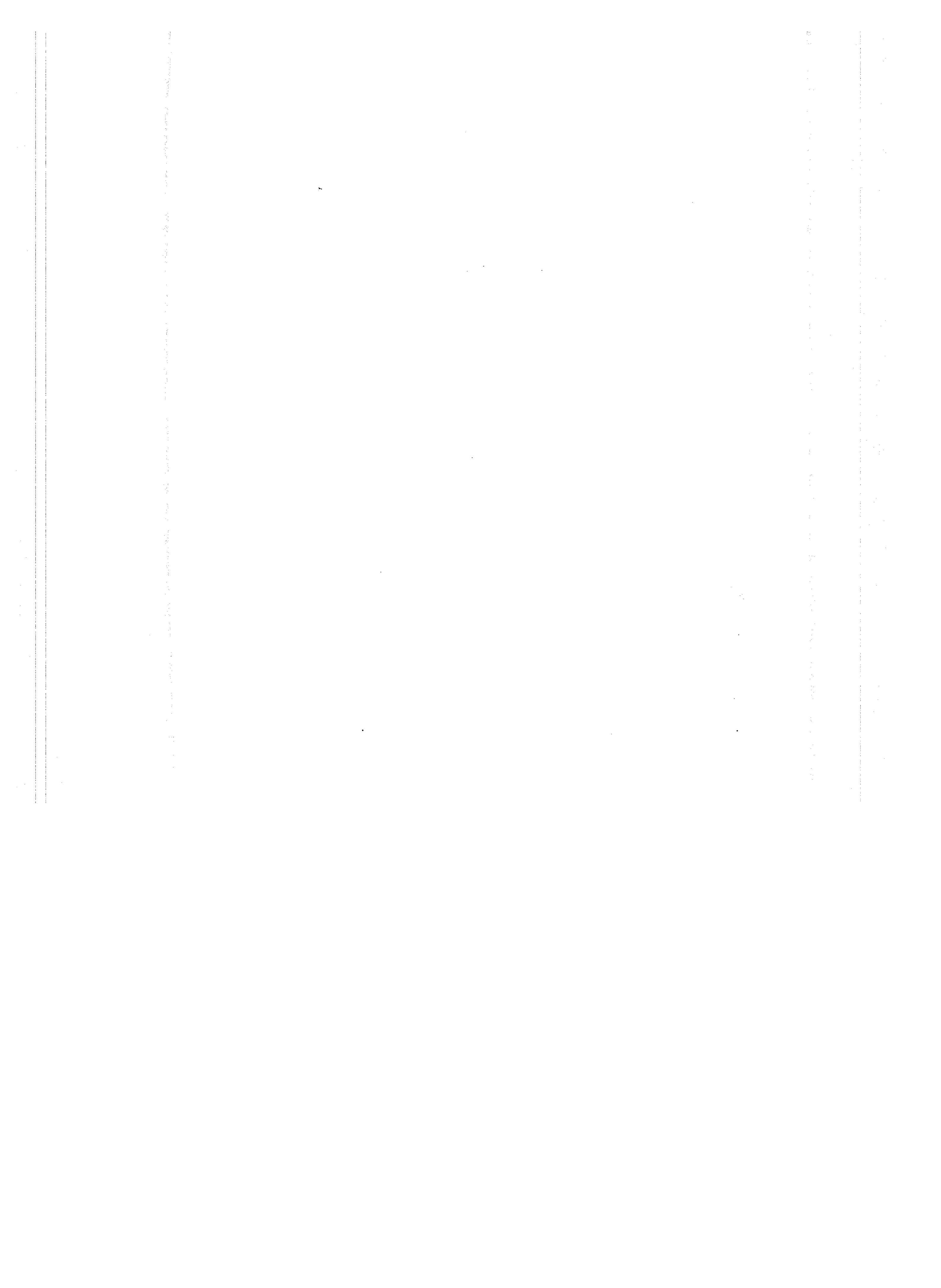
فما هو نموذج الشحن من المناجم إلى المصانع، الذى سيدنى تكلفة النقل؟

8- مزج الصوف Blending : قرر قسم التسويق بشركة اللؤلؤة للأصواف تقديم نوعين من الإيشاربات للموسم الشتوى القادم. وكانت تكلفة تصنيع وحدة الإيشارب ذى طول 2 متر هى 3 دولارات، والربح المتوقع هو 4 $. ويحتاج كل إيشارب إلى 2 أوقية (الأوقية = 1 \ 16 من الرطل) من الغزل الأزرق، وأوقية واحدة من الغزل الأخضر ، 3 أوقيات من الغزل الأسود. أما تكلفة تصنيع وحدة الإيشارب بطول 1 متر هو 2 $ ، مع ربح متوقع قدره 3. ويحتاج كل إيشارب من هذا الطول إلى أوقية واحدة من الغزل الأزرق، 2 أوقية من الغزل الأخضر، وأوقية واحدة من الغزل الأسود. وكانت كمية الغزل المتاحة هى 5000 أوقية من الغزل الأزرق ، 4500 أوقية من الغزل الأخضر ، 5500 أوقية من الغزل الأسود. فما هو عدد الإيشاربات من كل طول سيعظم معه الربح. أكتب اجابتك فى شكل تقرير إلى قسم التسويق.

9- الإعلان Advertising : تخطط شركة الحلويات اللذيذة للبدء فى حملة إنتاجية لمنتجاتها الجديدة ذى النكهات المختلفة. وأوضحت مقابلة مع وكالتهم الإعلانية أن تكلفة الإعلان الواحد فى المجلة هو 700 $ وفى الجريدة سيتكلف 500 $. وقد قدر أن يصل الاعلان الأول بالمجلة إلى 15.000 مشترٍ، وأن أى إعلان تال سيصل إلى 1200 مشتر إضافى. وسيصل الإعلان الأول بالجريدة إلى حوالى 30.000 مشتر، وأن أى إعلان تال سيصل إلى 1200 مشتر إضافى. اعرض المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم عدد الأفراد الذين تصلهم الحملة الإعلانية فى حدود ميزانية 30.000 $. أكتب الحل فى صورة خطاب إلى نائب الرئيس لشئون الإعلان بالشركة المذكورة.

10- مزرعة **Farm**: يمتلك مزارع 200 فدان من الأرض مع حرية الاختيار لتأجير كل أو بعض من 100 فدان إضافي بإيجار قدره 25 $ للفدان. ويرغب المزارع في تقرير عما إذ كان سيتمكن من عدمه من زراعة ذرة أو فول صويا على أرضه أو ربما يربي ذكور العجول أو يشترك في توليفات من الأنشطة الثلاث. تحتاج الذرة التي تغل 60 $ كربح للفدان إلى 3 ساعات عمالة للفدان و 25 $ من رأس المال للفدان. ويحتاج فول الصويا الذي يغل 50 $ كربح للفدان إلى 2 ساعة عمالة للفدان و 20 $ من رأس المال للفدان. أما الربح لكل رأس ماشية من ذكور العجول فهو 90 $. ويحتاج كل حيوان إلى 280 $ كتكلفة رأسمالية و 3 ساعات عمالة، وإلى 0.05 فدان من الأرض. والاختيارات الأخرى المفتوحة للمزارع والتي قد تساعده في اختيار ما سيزرعه، وإذا كان سيقوم بتربية العجول أم لا، تتركز في الواقع حول قيامه بتأجير أرض بقيمة قدرها 20 $ للفدان، ويستأجر عمالة بتكلفة 2.50 $ للساعة أو قيامه بالعمل نظير 2.40 $ للساعة. وكان عدد الساعات المتاحة للمزارع هي 150 ساعة، وكان رأس المال المتاح له هو 40.000 $. استخدم البرنامج الخطي لتحديد توليفة الأنشطة التي تعظم الربح لهذا المزارع.

**



الباب التاسع

تحـــليـــل الـــتعـــادل والـــتوزيـــع الطبيعـــى لاتخـــاذ القـــرار

Break-Even Analysis and The Normal Distribution

تمهيـــد :

يتعرض هذا الجزء إلى كيفية تناول نظرية القرارات للمشاكل كبيرة الحجم ذات الحلول الكثيرة البديلة. وسيبدأ بحالة مؤسسة تواجه قرارين بديلين تحت ظروف طبيعية عديدة **States of natures** وسيستخدم التوزيع التكرارى الطبيعى ذو التطبيق الواسع الانتشار فى اتخاذ القرارات للأعمال – فى وصف تلك الحالات التى تصادفها. كما يستخدم لعرض قرارات بديلة ممكنة عندما تختار مؤسسة ما لاتباع أسلوب لاحتياجات المخزون.

تحليل التعادل والتوزيع الطبيعى:

يجيب هذا التحليل على التساؤلات الإدارية الشائعة والتى تتعلق بتأثير أى قرار على الإيرادات أو التكاليف الكلية، وعند أى نقطة ستتساوى فيها الإيرادات مع التكاليف؟ وعند أى حجم من المبيعات المؤكدة أو مستوى الطلب ، وما هى الإيرادات التى ستتولد ؟ وإذا أضفنا خطاً لإنتاج جديد ، فهل هذا سيزيد من الإيرادات ؟ وفى هذا الجزء سننظر إلى المفاهيم الأساسية لتحليل التعادل واستكشاف كيفية استخدام التوزيع الطبيعى المعتدل فى عملية اتخاذ القرار.

قرار شركة سيجورات الأهلية لإنتاج جديد:

تعتبر الشركة من المؤسسات الكبرى فى تصنيع المواسير اللدائنية. ويواجه نائب رئيس الشركة للتسويق اتخاذ قرار من عدمه لتقديم ناتج جديد إلى السوق التنافسى ويسمى "الاستراتيجى" وطبيعى أن الشركة تضع فى اعتبارها التكاليف ، والطلب المحتمل والأرباح التى يمكن تحقيقها من تسويق تلك الماسورة الجديدة. ويتعرف نائب الرئيس للتسويق على التكاليف التالية:

التكاليف الثابتة (وهى التى لا تتغير مع حجم الإنتاج مثل الأجهزة الجديدة، والتامين ، الإيجار،...)

= 36.000 جنيه

التكلفة المتغيرة للوحدة الناتجة (وتتغير مع حجم الإنتاج مثل المواد الخام والعمالة. = 4 جنيه

سعر البيع للوحدة .... = 10 جنيه

ونقطة التعادل هى عدد وحدات الناتج التى ستتساوى عندها الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية. ويعبر عنها بالآتى :

نقطة التعادل (الوحدات الجديدة) = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر الوحدة – التكلفة المتغيرة للوحدة}}$

= $\frac{\text{36.000 جنيه}}{\text{10 - 4 جنيه}}$ = 6.000 وحدة

وسيتحقق ربح عند أى زيادة فى الطلب عن 6.000 وحدة . بينما ستنتج خسارة إذا قل الطلب عن 6.000 وحدة. فعلى سبيل المثال ، إذا تبين أن الطلب على هذا الناتج هو 11.000 وحدة ، فإن الربح سيكون 30.000 جنيه كما يشاهد من الحل التالى:

الإيراد (11.000 × 10 جنيه / وحدة)		110.000 جنيه
ناقصاً التكاليف:		
تكاليف ثابتة	36.000	
تكاليف متغيرة (11.000 × 4 جنيه / وحدة)	44.000	
إجمالى التكاليف		80.000
الربح		30.000 جنيه

أما إذا كان الطلب هو 6.000 وحدة بالضبط فالربح سيكون صفراً.

ولكن نائب الرئيس للتسويق عنده المعلومة التى ستساعد فى اتخاذ قرار تقديم الناتج الجديد. فإذا كان الطلب أقل من 6.000 وحدة فستتحقق خسارة، ولكن الطلب الحقيقى غير معروف ، لذلك يقرر استخدام التوزيع الاحتمالى لتقدير الطلب.

التوزيع الاحتمالى للطلب

قد يكون الطلب على الناتج الجديد عند أى مستوى – صفراً من الوحدات ، 2 وحدة ... وحتى العديد من الآلاف . ويحتاج نائب الرئيس لتقدير احتمالات مستويات الطلب المختلفة لكى يستكمل بناء قراره. ومن الشائع استخدام التوزيع الطبيعى الاحتمالى فى تقدير الطلب لإنتاج جديد . ومن المناسب عندما تكون المبيعات متماثلة حول متوسط الطلب المتوقع ، فإنها تأخذ شكل الناقوس فى توزيعها. وهذا المنحنى يعتمد على عاملين:

أ – متوسط التوزيع (μ)

ب – الانحراف المعيارى للتوزيع (σ)

ولاستخدام التوزيع فعلى صاحب القرار أن يحدد قيما لكل من μ ، σ ونعلم أنه ليس من السهل عليه ذلك مباشرة ، ولكن يكون لديه فكرة ما عن شكل الانتشار. ويظن نائب الرئيس أن أحسن احتمالات لرقم

المبيعات هو 8.000 وحدة ، وقد يكون الطلب منخفضاً إلى 5.000 وحدة أو مرتفعاً إلى 11.000 وحدة. وقد يصل رقم المبيعات إلى ما بعد هذه الحدود، وليكن مثلاً بفرصة 15 % ليكون تحت 5.000 ، 15 % ليكون 11.000 .

ولما كان التوزيع متماثلاً فقد تقرر استخدام منحنى التوزيع الطبيعي، ولحساب القيم العيارية (Z) لأقل أو أعلى من المتوسط (μ) والتي يزودنا بها جدول (أ) بالملحق ، نستخدم المعادلة التالية:

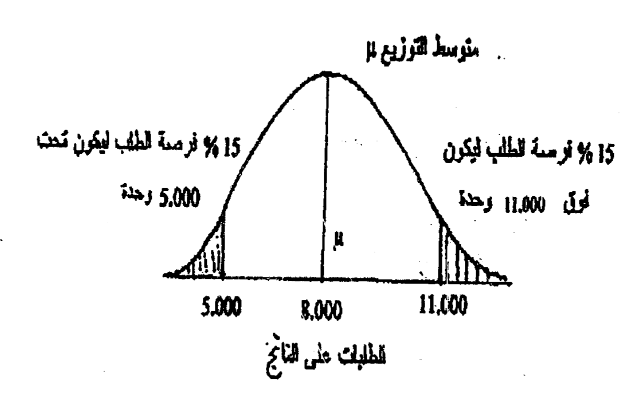
$$Z = \frac{Demand - \mu}{\sigma}$$

ونجد في الشكل (9-1) أن المساحة تحت المنحنى على يسار 11.000 وحدة مطلوبة هي 85 % من المساحة الكلية . وأن قيمة Z لتلك المساحة من الجدول (أ) بالملحق هي 1.04 قيمة عيارية. وهذا يعني أن الطلب على 11.000 وحدة هو 1.04 قيمة عيارية على يمين المتوسط (μ). ولما كانت (μ) = 8.000 ، (Z)= 1.04 والطلب = 11.000 وحدة نستطيع تقدير (σ) .

$$1.04 = \frac{11.000 - 8.000}{\sigma}$$

$$\sigma = 2.885$$ وحدة

شكل (9 –1) التوزيع الطبيعي لطلب ناتج شركة سيجورات

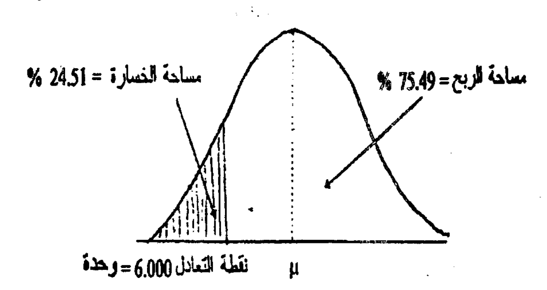


وهذا الحل يثير بعض التساؤلات ذات الصيغة المالية لإدارة الشركة – مثل ما هو احتمال نقطة التعادل . نحن نعرف مما سبق أن نقطة التعادل هي 6.000 وحدة فلنبحث عن الانحرافات المعيارية من 6.000 إلى المتوسط .

$$Z = \frac{\text{نقطة التعادل} - \mu}{\sigma} = \frac{6.000 - 8.000}{2.885} = -0.69$$

وهذا يتمثل في الشكل (9 – 2).

شكل (9- 2) احتمالات نقطة التعادل لشركة سبيجورات



والجدول (أ) بالملحق يتعامل مع قيم Z الموجبة ، فنبحث عن قيمة Z + 0.69 فنجدها 0.7549 من جملة المساحة تحت المنحنى . أما المساحة تحت المنحنى للقيمة - 0.69 فهي (1 – 0.7549) = 24.51 % على يسار نقطة التعادل 6000 وحدة . ومن ذلك :

24.51 % = (نقطة التعادل > الطلب) P = (الخسارة) p

75.49 % = (نقطة التعادل < الطلب) P = (الربح) P

حيث p هى احتمال Probability. وهذا يعنى أن هناك فرصة قدرها 75 % لتحقيق ربح تأخذه الشركة فى الاعتبار . وقبل تركنا لهذا التحليل نود أن نشير إلى نقطتين هامتين:

1-إفتراضنا أن الطلب الجديد ذو توزيع طبيعى، فإذا وجد أنه غير ذلك ، فهناك توزيعات أخرى يمكن استخدامها ، وهى خارج أطار هذا المرجع.

2- إفتراضنا أن الطلب هو المتغير العشوائى الوحيد. فإذا كان أحد المتغيرات الأخرى (السعر ، التكلفة المتغيرة ، أو التكلفة الثابتة) عشوائية ، فإجراء مماثل يمكن أن يتبع ، فإذا زاد عن ذلك فهو خارج إطار هذا المرجع.

استخدام القيمة النقدية المتوقعة (EMV) فى اتخاذ القرار

هذا و بالإضافة إلى معرفة احتمال حدوث خسارة من تقديم هذا الناتج، فالشركة تود التعرف على القيمة النقدية المتوقعة (EMV) من إنتاج هذا الناتج . تعلم الشركة أن باختيار عدم إنتاجها فإن (EMV) ستكون صفراً ، أى ستكون الأرباح صفراً. ولكن إذا كانت تلك القيمة أكبر من الصفر فسيوصى بتلك الاستراتيجية التى تحقق ربحاً. ولحساب هذه القيمة فيجرى استخدام الطلب المتوقع (μ) فى دالة الربح الخطية التالية:

EMV = (سعر الوحدة – التكلفة المتغيرة للوحدة) (متوسط الكمية

" المطلوبة) – إجمالى التكلفة الثابتة

= (10 – 4 جنيه) (8.000 وحدة) – 36.000 جنيه

= 12.000 جنيه

ولنائب رئيس الشركة خياران عند هذه النقطة إذ يستطيع التوصية بأن تمضى الشركة قدماً فى إنتاج هذه الماسورة ، وفى ذلك فإن هناك فرصة قدرها 75 % لتحقيق نقطة التعادل وقيمة نقدية متوقعة قدرها 12.000 جنيه، أوقد يفضل إجراء مزيد من الدراسات التسويقية قبل اتخاذ أى قرار. وهذا سينقلنا إلى موضوع القيمة المتوقعة فى ضوء المعلومات التامة Perfect information .

EVPI والتوزيع الطبيعى

ويقصد من EVPI (Expected Value of perfect Information) أنها تضع حداً أعلى على الكمية التى ستقوم بها مؤسسة مثل شركة سيجورات الأهلية بانفاقها على المعلومات التسويقية. وفى هذا المقام فالفرصة البديلة المتوقعة للخسارة Expected Opportunity LOSS (EOL) هى الخسارة التى سيحدثها المسئول التسويقى بعدم اختياره أحسن البدائل نتيجة لعدم التأكد.

ونعود الأن لحساب كل من EVPI و EOL فى الشركة المذكورة بتقديمها للسوق الماسورة الجديدة ويشمل ذلك خطوتين:

1- تحديد دالة فرصة الخسارة.

2- استخدام الدالة السابقة و unit normal loss integral (من جدول ب بالملحق) وذلك لإيجاد (EOL) وهى تماثل (EVPI).

دالة فرصة الخسارة Opportunity Loss Function

وتصف تلك الدالة الخسارة التى ستتحقق بتنفيذ القرار الخاطىء . فلقد رأينا فى مثال شركة سيجورات الأهلية أن نقطة التعادل هى 6.000 وحدة فإذا قررت الشركة انتاج وتسويق الوحدة الجديدة وأن المبيعات أكثر من 6.000 وحدة ، فقد كان القرار صائباً، وفى هذه الحالة لا توجد فرصة للخسارة (صفر جنيه). ولكن إذا عرضت الوحدة والمبيعات أقل من 6.000 وحدة فلقد اختير البديل الخاطىء، ففرصة الخسارة هى ما يتحقق من فقدان للنقود إذا كان الطلب أقل من نقطة التعادل .فعلى سبيل المثال إذا كانت كمية الطلب هى 5.999 وحدة فالشركة تخسر 6 جنيهات (10 جنيه سعر الوحدة – 4 جنيه تكلفة الوحدة). وبخسارة قدرها 6 جنيهات للوحدة مضروبة فى عدد الوحدات لأقل من 6.000 وحدة لتعطينا فرصة الخسارة الكلية ، وفى حالة بيع 5.000 وحدة فقط فالخسارة ستكون 1000 وحدة اقل من نقطة التعادل مضروبة فى 6 جنيهات للوحدة = 6.000 جنيه. وعلى أى مستوى من مبيعات (x) فدالة فرصة الخسارة يمكن التعبير عنها كالآتى:

Opportunity loss = (£ 6 (6000 - x)   for $x \le 6000$ وحدة

(£ 0 $x > 6000$ وحدة

وعموماً فتحسب هذه الدالة كالآتى:

Opportunity loss = (**k (Break – even point) – x**)   for $x \le$ ------ BE

(£ 0   for $x >$ ----- BE

حيث :

k = الخسارة لكل وحدة عندما تنقص المبيعات عن نقطة التعادل

X = وحدات السلعة المباعة

£ = علامة الجنيه

فرصة الخسارة المتوقعة EOL

والخطوة الثانية هى لإيجاد فرصة الخسارة المتوقعة ، وهى مجموع فرص الخسارة مضروبة فى القيم الاحتمالية المناسبة. ولكن فى حالة شركتنا فيوجد عدد كبير من قيم المبيعات الممكنة ، فإذا كانت نقطة التعادل هى 6.000 وحدة ، فسيكون هناك 6.000 قيمة مبيعات ممكنة، من صفر 1، 2، 3 حتى 6.000 وحدة . ومن ذلك فلتقدير EOL ستحتاج إلى 6.000 قيمة احتمالية تتمشى مع 6.000 قيمة مبيعات ممكنة. وهذه الأرقام ستضرب وتضاف معاً، وهى عملية شاقة وطويلة.

وعندما نفترض وجود عدد ممكن لا نهائى من قيم المبيعات الممكنة الذى يتبع التوزيع الطبيعى، فالحسابات ستكون أسهل . وفى الحقيقة فعندما يستخدم جدول (Unit normal loss integral) فيمكن حساب EOL كالآتى:

$$EOL = k\,\sigma\,N(D)$$

وحيث EOL = فرصة الخسارة المتوقعة

K = الخسارة للوحدة عندما تنقص كمية المبيعات عن نقطة التعادل

σ = الانحراف المعيارى للتوزيع

$$D = \left| \frac{\text{نقطة التعادل} - \mu}{\sigma} \right|$$

حيث | | هى = علامة القيمة المطلقة

μ = متوسط كمية المبيعات

the value for the unit normal loss integral = N (D)

وهى تتواجد فى جدول (ب) فى الملحق لكل قيمة من D.

وبالرجوع إلى شركتنا لحساب EOL حيث :

$K = 6$

$\sigma = 2.885$

$$D = \left| \frac{8.000 - 6.000}{2.885} \right| = 0.69 = 0.60 + 0.09$$

وبالرجوع إلى جدول (ب) بالملحق ، ننظر إلى الصف " 0.6" ونقرأ من أعلى العمود "0.09 " وهذه هى (0.69) وقيمتها 0.1453 .

$$N(0.69) = 0.1453$$

وبالتعويض :

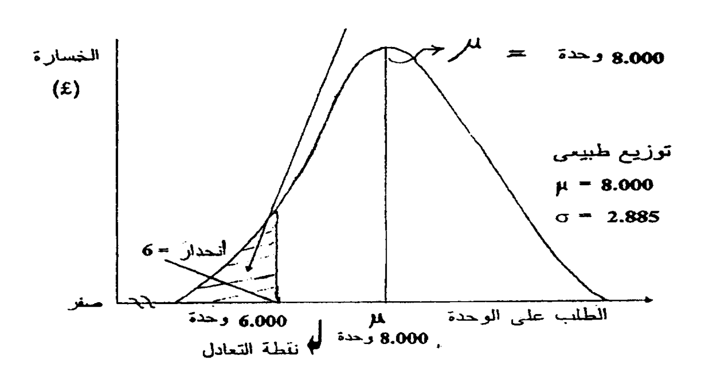
$$EOL = k\,\sigma\,N(0.69)$$
$$= (6)\,(2885)\,(0.1453) = £\ 2515.14$$

ولما كانت EVPI , EOL ذواتى توزيع معتدل normaly distributed فإن EVPI تساوى أيضاً 2515.14 £ وهذه هى أقصى كمية من النقود تزمع الشركة إنفاقها على معلومات تسويقية إضافية .

شكل (9-3) دالة فرصة الخسارة (EOL) لشركة

سيجورات الأهلية

$$\text{Opportunity loss} = \begin{cases} £\,6\,(6.000 - X) & \text{for } X \leq 6.000 \text{ وحدة} \\ £\,0 & \text{for } X > 6.000 \text{ وحدة} \end{cases}$$



والعلاقة بين دالة فرصة الخسارة والتوزيع الطبيعى يعرضها الشكل (9-3) حيث نجد أن دالة فرصة الخسارة على يمين نقطة التعادل تساوى صفراً ، أما على يسارها فتزداد الدالة بمعدل 6 جنيهات للوحدة ، ومن هنا كان الانحدار = - 0.6 . وفائدة جدول (ب) بالملحق هو السماح لنا بضرب قيمة وحدة الخسارة 6 جنيهات فى كل الاحتمالات ما بين 6.000 وحدة وصفر وحدة ، وتجميع هذه المضروبات.

*

التحليل الحدى

Marginal Analysis

حتى الآن، لقد أخذنا فى الاعتبار الأوضاع الطبيعية العديدة ، ولكن فقط ذات قرارين متبادلين. ولكن ماذا يحدث عندما يكون أيضاً عدد البدائل كبير جداً. ولحالات معينة من المشاكل، يمكن استخدام مدخل

يسمى التحليل الحدى. ويستخدم التحليل الحدى فى اتخاذ القرارات، حيث يساعد فى اختبار المستوى الأمثل للرصّات stocking، ويتناول تعريفين هما الربح الحدى والخسارة الحدية. ولنعتبر موزعا للصحف ، وتكلفة كل صحيفة يومية 9 سنت (السنت = 1 \ 100 من الدولار) وحيث تباع بـ 15 سنت. ولكن إذا لم تباع حتى نهاية اليوم فلا قيمة لها إطلاقا (صفر سنت) ، وفى هذه الحالة فإن الربح الحدى marginal profit (MP) هو الربح المتحقق من بيع كل صحيفة إضافية، قدره 6 سنت (15 سنت – 9). أما الخسارة الحدية marginal loss (ML) فهى التى تتسبب من التخزين ، وليس من البيع ، لكل صحيفة إضافية، وهى 9 سنت فى حالة بقاء الصحيفة غير مباعة حتى نهاية اليوم.

وعندما يتواجد العديد من البدائل الممكن التعامل معها ذات الظروف المختلفة states of nature ونعرف احتمالاتها، فحينئذ يمكننا استخدام التحليل الحدى مع التوزيعات غير المتصلة discrete distribution . وإذا كان عدد البدائل الممكنة كبيرا جدا، والحالات الطبيعية و التوزيعات الاحتمالية، يمكن وصفها بالتوزيع الطبيعى normal distribution ، فحينئذ يكون مناسبا استخدام التحليل الحدى مع التوزيع الطبيعى. وفيما يلى مناقشة لكل من الأسلوبين.

أ- التحليل الحدى مع التوزيع غير المتصل

إنه ليس من الصعوبة إيجاد أحسن مستوى من الرصّات عند إتباعنا لخطوات التحليل الحدى ، وبثبات ومعرفة given مستوى أى رصات، فسنضيف فقط وحدة إضافية لمستوى رصّاتنا إذا كان الربح الحدى المتوقع يتساوى أو يزيد عن الخسارة الحدية المتوقعة ، ويعبّر عن ذلك فيما يلى:

حيث:

→(القراءة هكذا)

احتمال أن الطلب أكبر من أو يساوى عرضا مُعطى = P

(احتمال بيع نسخة إضافية واحدة على الأقل)

احتمال أن الطلب سيكون أقل من العرض = 1-P

ويحسب الربح المتوقع بضرب احتمال بيع نسخة معطاة given فى الربح الحدى، P(MP).

وبالمثل فإن احتمال الخسارة المتوقعة هى احتمال عدم البيع(1-P) مضروبا فى الخسارة الحدية (ML) ، وكقاعدة للقرار الأمثل هو عندما يكون:

$$P(MP) \geq (1-P)(ML)$$

$$\geq ML - P(ML)$$

OR $$P(MP) + P(ML) \geq ML$$

$$P(MP + ML) \geq ML$$

OR $$P \geq ML / (MP + ML)$$

وبعبارة أخرى ، فطالما أن احتمال بيع وحدة واحدة إضافية (P) أكبر أو تساوى (ML / (MP + ML ، فسنقوم بتخزين الوحدة الإضافية. ويبين مثال التخزين التالى هذا المخزون.

فى مقهى بحى راق، تقوم الإدارة ببيع القهوة الساخنة مع الفطيرة الفرنسية المشهورة كرواسون، وهى تشترى الفطيرة يومياً من مخزن كبير. ويدفع المحل 4 دولارات لكل كرتونة فطائر (تحتوى على 2 دستة) تُسلم إليه كل صباح.ويتخلص من كل كرتونة لا تباع بنهاية اليوم ، حيث لن تكون طازجة بدرجة كافية للحفاظ على مستوى الخدمة. وإذا بيعت الكرتونة، فإن جملة الإيراد ستكون 6 دولارات. فالربح الحدى لكل كرتونة من الفطائر سيكون:

MP = الربح الحدى = 6 - 4 = $2

وتكون الخسارة الحدية ML = 4 دولارات حيث لا تعاد الكرتونة ، ويتخلص منها فى نهاية اليوم.

جدول (9-1) التوزيع الاحتمالى لمبيعات فطائر القهوة

المبيعات اليومية (كرتونة)	احتمال المبيعات عند هذا المستوى
4	0.05
5	0.15
6	0.15
7	0.20
8	0.25
9	0.10
10	0.10
الإجمالى	1.00

ومن المبيعات السابقة ، يقدر صاحب المقهى أن المبيعات اليومية ستتبع التوزيع الاحتمالى المبين فى الجدول (9-1). وستتبع الإدارة ثلاث خطوات لإيجاد عدد الكرتونات المثلى من الفطائر التى تطلبها كل يوم.

الخطوة الأولى: قدّر قيمة P فى معادلة القرار

$$P \geq ML / (ML + MP) = \$4 / (\$4 + \$2) = 0.66$$

الخطوة الثانية : أضف عموداً جديداً للجدول السابق ليعكس احتمالات بيع الفطائر عند كل مستوى أو أعلى، كما يرى فى العمود الأيسر من الجدول (9-2). فعلى سبيل المثال، فاحتمال المبيعات لعدد 4 فطائر أو أكثر هو واحد (أى = 0.05 + 0.15 + 0.15 + ... 0.10) حيث كانت المبيعات ما بين

4 و 10 كرتونات يومياً. وبالمثل فاحتمال مبيعات 8 كرتونات أو أكثر هو 0.45 (أى= 0.25 + 0.10 + 0.10) أى مجموع احتمالات بيع 8 أو 9 او 10 كرتونات.

الخطوة الثالثة: داوم على استلام كرتونات إضافية طالما أن احتمال بيع كرتونة إضافية واحدة على الأقل أكبر من p ، والتى تتضمن احتمالات التعادل break - even probability. فإذا طلب المقهى توريد 6 كرتونات فإن الربح الحدى ما زال يكون أكبر من الخسارة الحدية .

← (القراءة هكذا)

$P \geq ML / (ML + MP)$ حيث $0.80 \geq 0.66$ عند 6 كرتونات

فإذا طلب 7 كرتونات أو أكثر، عندئذ سيكون احتمال بيعهم (0.65) وليس أكبر من (0.66)، وستكون الخسارة الحدية المتوقعة أكبر من الربح الحدى المتوقع. فالقرار الأمثل هو طلب توريد 6 كرتونات كل صباح.

جدول (9-2) التحليل الحدى لمقهى الفطائر الفرنسية

المبيعات اليومية (كرتونة)	احتمالات المبيعات عند هذا المستوى	احتمالات المبيعات ستكون عند هذا المستوى أو أكبر
4	0.05	$0.66 \leq 1.00$
5	0.15	$0.66 \leq 0.95$
6	0.15	$0.66 \leq 0.80$
7	0.20	0.65
8	0.25	0.45
9	0.10	0.20
10	0.10	0.10
الإجمالى	1.00	

هذا ولو أن التحليل الحدى مع التوزيع غير المتصل هو أكثر كفاءة من جداول القرارات حيث هناك ما يزيد عن 15 أو 20 بديلا مختلفا مع طبائع مختلفة، فإن التحليل الحدى مع التوزيع الطبيعى قد يكون أكثر مناسبة.

ب- التحليل الحدى مع التوزيع الطبيعى

عندما يكون الطلب على ناتج أو مبيعاته يتبع التوزيع الطبيعى ، وحيث هو الموقف الشائع فى البزنس ، فإن التحليل الحدى المصاحب للتوزيع الطبيعى يجرى تطبيقه ، ونحتاج فى ذلك إلى التعرف على :

1- متوسط مبيعات الناتج (μ)
2- الانحراف المعيارى للمبيعات (σ)
3- الربح الحدى للناتج (MP)

4- الخسارة الحدية للناتج (ML)

وبتقدير هذه الكميات يمكن الوصول إلى أحسن كمية للطلبات Stocking.

الخطوة الأولى : تقدير قيمة P، ومن التوزيع الطبيعى فإن:

$$P = ML / (ML + MP)$$

الخطوة الثانية : إيضاح مكان P على التوزيع الطبيعى . فلمساحة معطاة تحت المنحنى ، نستطيع إيجاد Z من الجدول الطبيعى (جدول 1 بالملحق) ، ثم استخدام العلاقة :

$$z = \frac{x^* - \mu}{\sigma}$$

فى إيجاد قيمة X^* ، وهى السياسة المثلى لكمية الطلبات.

مثال:

الطلب على نسخ من صحيفة الواشنطن بوست فى محل كوك للصحف، يتوزع طبيعياً بمتوسط 50 نسخة يومياً ، وإنحراف معيارى 10 صحف. ومع وجود خسارة حدية قدرها 4 سنت ، وربح حدى 6 سنت ، فما هو طلب التوريد اليومى؟

الخطوة الأولى : محل كوك سيطلب كميات حتى يكون الطلب عند مستوى معين أو أكبر يكون على الأقل ML / (ML + MP) ، أى :

$$\mathbf{P = ML / (ML + MP) = 4 / (4 + 6) = 0.40}$$

الخطوة الثانية : يبين الشكل التالى (9-4) التوزيع الطبيعى حيث تتراكم المساحات تحت المنحنى ما بين الجانب الأيسر وإلى أى نقطة. فننظر إلى 0.60 أى (= 1.0 – 0.40) للحصول على القيمة Z المصاحبة .

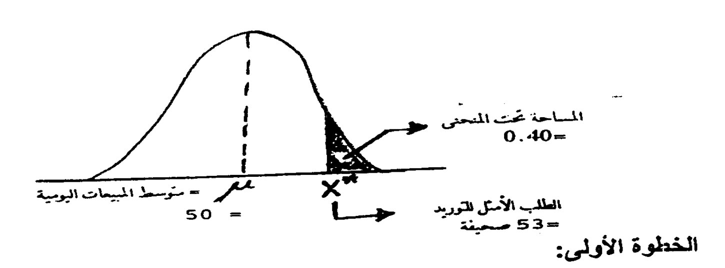
$Z = 0.25$ (انحرافات معيارية عن المتوسط)

وفى هذه المشكلة فإن $\mu = 50$ ، $\sigma = 10$ ، وبذلك فإن :

$$0.25 = \frac{x^* - 50}{10}$$

حينئذ : $x^* = 52.3$ أو 53 صحيفة ، وهو ما يجب أن يطلبه صاحب محل كوك يومياً من تلك الصحيفة ويُتّبع نفس الاجراء إذا كانت P أكبر من 0.50 . فبالرجوع للمحل السابق حيث كانت الخسارة الحدية لصحيفة الواشنطن بوست هى 8 سنت والربح الحدى 2 سنت، وبلغ متوسط المبيعات اليومية 100 صحيفة ، وانحراف معيارى 10 صحف ، فما هو طلب التوريد اليومى؟

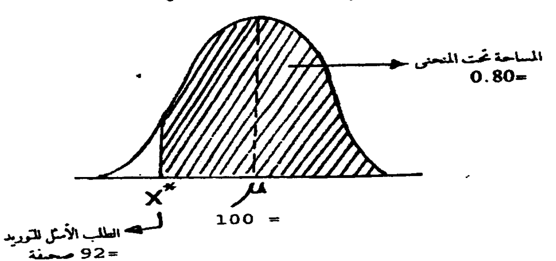
شكل (9-4) قرار التوريد لمحل كوك للصحف



الخطوة الأولى:

$$P = ML / (ML + MP) = 8 / (8 + 2) = 0.80$$

شكل (9-5) قرار التوريد لمحل كوك للصحف



الخطوة الثانية : يبين الشكل (9-5) التوزيع الطبيعي. ونظراً لأنه متماثل فإننا نجد Z للمساحة تحت المنحنى، ونضرب هذا الرقم في (-1).

Z = - 0.84 (انحرافات معيارية عن المتوسط لمساحة 0.80)

ومع $\mu = 100$ و $\sigma = 10$

فإن .... $-\ 0.84 = \dfrac{x^* - 100}{10}$

حينئذ $x^* = 91.6$ و 92 صحيفة ، وهو ما يجب أن يطلبه صاحب محل كوك يومياً من تلك الصحيفة.

تعلـــيق:

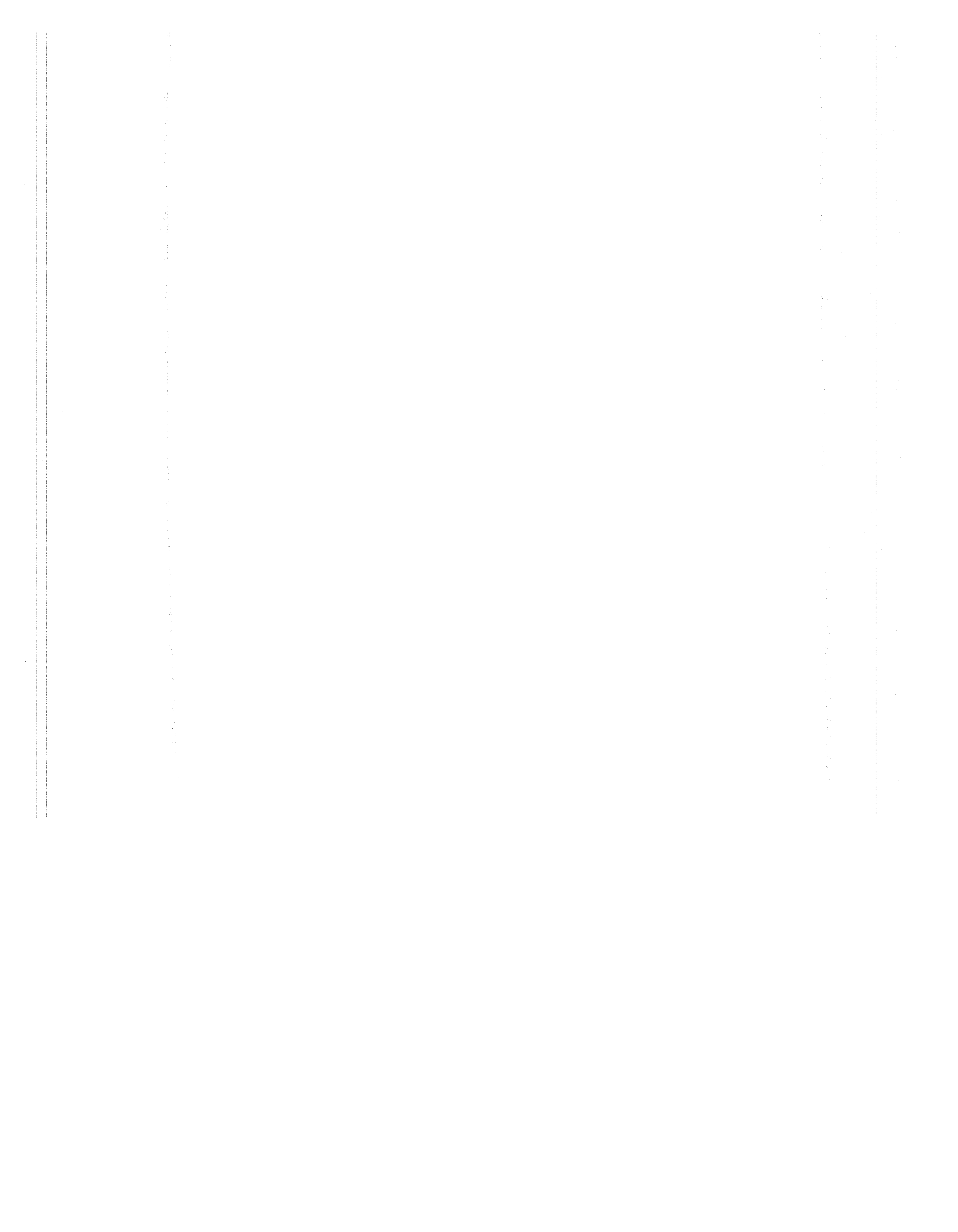
يشير هذان المثالان إلى أنه عندما يكون الربح الحدى أكبر من الخسارة الحدية، فنتوقع أن تكون قيمة x^* أكبر من متوسط الطلب (μ) ، وعندما يكون الربح الحدى أقل من الخسارة الحدية فنتوقع قيمة x^* أقل من (μ).

***

الـمــــلحــق

(أ) جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى

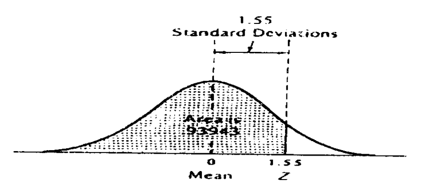
(ب) جدول الوحدة المتكاملة للخسارة الطبيعية



تفسير جدول (أ)

جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي

Areas under the Standard Normal Table



Example: To find the area under the normal curve, you must know how many standard deviations that point is to the right of the mean. Then, the area under the normal curve can be read directly from the normal table. For example, the total area under the normal curve for a point that is 1.55 standard deviations to the right of the mean is .93943.

جدول (أ) المساحات تحت المنحنى الطبيعي

Z	00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99899	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Source: Reprinted from Robert O. Schlaifer *Introduction to Statistics for Business Decisions*, published by McGraw-Hill Book Company, 1961, by permission of the copyright holder, the President and Fellows of Harvard College.



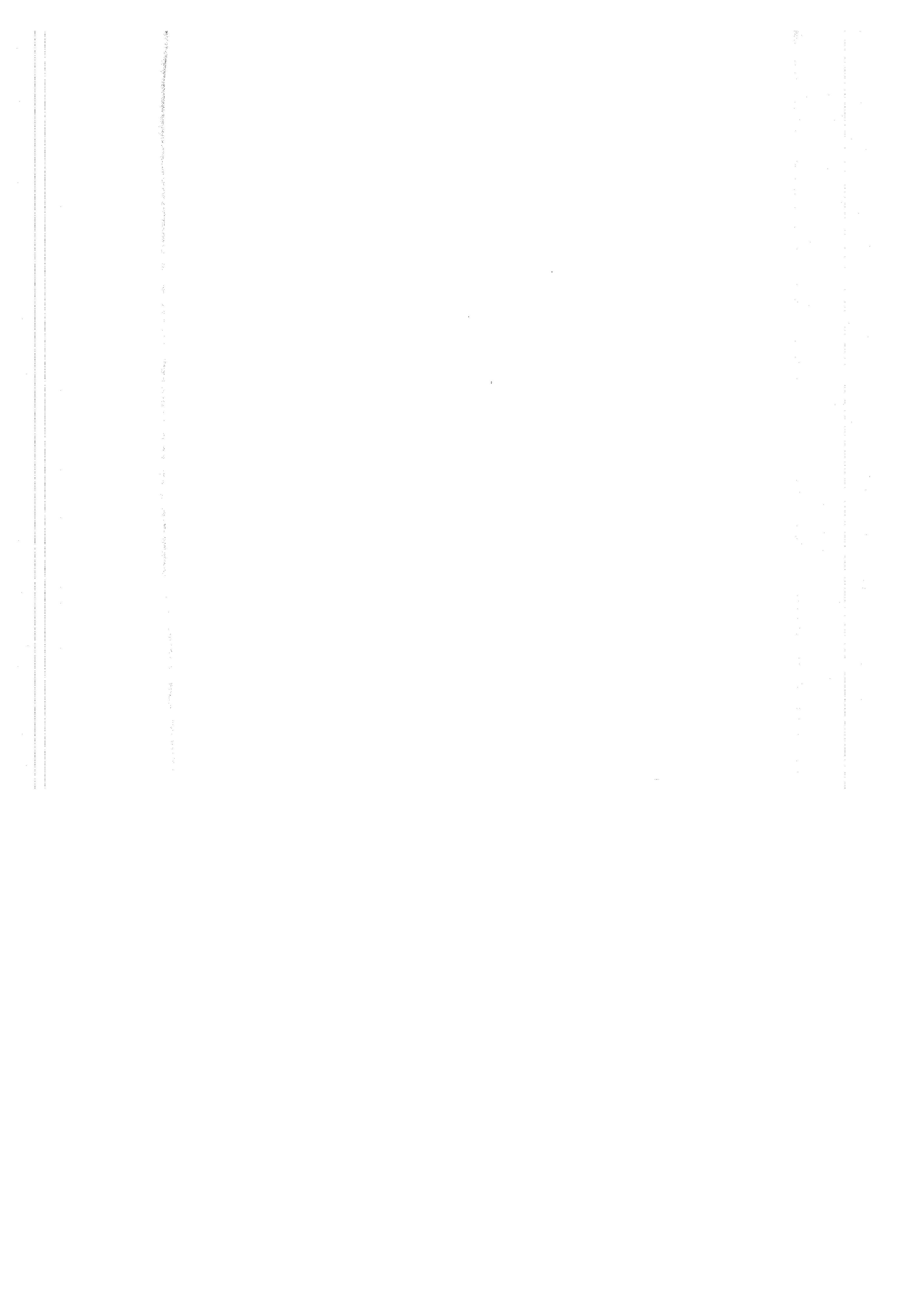
جدول (ب) الوحدة المتكاملة للخسارة الطبيعية

The Unit Normal Loss Integral

D	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.3989	.3940	.3890	.3841	.3793	.3744	.3697	.3649	.3602	.3556
.1	.3509	.3464	.3418	.3373	.3328	.3284	.3240	.3197	.3154	.3111
.2	.3069	.3027	.2986	.2944	.2904	.2863	.2824	.2784	.2745	.2706
.3	.2668	.2630	.2592	.2555	.2518	.2481	.2445	.2409	.2374	.2339
.4	.2304	.2270	.2236	.2203	.2169	.2137	.2104	.2072	.2040	.2009
.5	.1978	.1947	.1917	.1887	.1857	.1828	.1799	.1771	.1742	.1714
.6	.1687	.1659	.1633	.1606	.1580	.1554	.1528	.1503	.1478	.1453
.7	.1429	.1405	.1381	.1358	.1334	.1312	.1289	.1267	.1245	.1223
.8	.1202	.1181	.1160	.1140	.1120	.1100	.1080	.1061	.1042	.1023
.9	.1004	.09860	.09680	.09503	.09328	.09156	.08986	.08819	.08654	.08491
1.0	.08332	.08174	.08019	.07866	.07716	.07568	.07422	.07279	.07138	.06999
1.1	.06862	.06727	.06595	.06465	.06336	.06210	.06086	.05964	.05844	.05726
1.2	.05610	.05496	.05384	.05274	.05165	.05059	.04954	.04851	.04750	.04650
1.3	.04553	.04457	.04363	.04270	.04179	.04090	.04002	.03916	.03831	.03748
1.4	.03667	.03587	.03508	.03431	.03356	.03281	.03208	.03137	.03067	.02998
1.5	.02931	.02865	.02800	.02736	.02674	.02612	.02552	.02494	.02436	.02380
1.6	.02324	.02270	.02217	.02165	.02114	.02064	.02015	.01967	.01920	.01874
1.7	.01829	.01785	.01742	.01699	.01658	.01617	.01578	.01539	.01501	.01464
1.8	.01428	.01392	.01357	.01323	.01290	.01257	.01226	.01195	.01164	.01134
1.9	.01105	.01077	.01049	.01022	$.0^2 9957$	$.0^2 9698$	$.0^2 9445$	$.0^2 9198$	$.0^2 8957$	$.0^2 8721$
2.0	$.0^2 8491$	$.0^2 8266$	$.0^2 8046$	$.0^2 7832$	$.0^2 7623$	$.0^2 7418$	$.0^2 7219$	$.0^2 7024$	$.0^2 6835$	$.0^2 6649$
2.1	$.0^2 6468$	$.0^2 6292$	$.0^2 6120$	$.0^2 5952$	$.0^2 5788$	$.0^2 5628$	$.0^2 5472$	$.0^2 5320$	$.0^2 5172$	$.0^2 5028$
2.2	$.0^2 4887$	$.0^2 4750$	$.0^2 4616$	$.0^2 4486$	$.0^2 4358$	$.0^2 4235$	$.0^2 4114$	$.0^2 3996$	$.0^2 3882$	$.0^2 3770$
2.3	$.0^2 3662$	$.0^2 3556$	$.0^2 3453$	$.0^2 3352$	$.0^2 3255$	$.0^2 3159$	$.0^2 3067$	$.0^2 2977$	$.0^2 2889$	$.0^2 2804$
2.4	$.0^2 2720$	$.0^2 2640$	$.0^2 2561$	$.0^2 2484$	$.0^2 2410$	$.0^2 2337$	$.0^2 2267$	$.0^2 2199$	$.0^2 2132$	$.0^2 2067$
2.5	$.0^2 2004$	$.0^2 1943$	$.0^2 1883$	$.0^2 1826$	$.0^2 1769$	$.0^2 1715$	$.0^2 1662$	$.0^2 1610$	$.0^2 1560$	$.0^2 1511$
2.6	$.0^2 1464$	$.0^2 1418$	$.0^2 1373$	$.0^2 1330$	$.0^2 1288$	$.0^2 1247$	$.0^2 1207$	$.0^2 1169$	$.0^2 1132$	$.0^2 1095$
2.7	$.0^2 1060$	$.0^2 1026$	$.0^3 9928$	$.0^3 9607$	$.0^3 9295$	$.0^3 8992$	$.0^3 8699$	$.0^3 8414$	$.0^3 8138$	$.0^3 7870$
2.8	$.0^3 7611$	$.0^3 7359$	$.0^3 7115$	$.0^3 6879$	$.0^3 6650$	$.0^3 6428$	$.0^3 6213$	$.0^3 6004$	$.0^3 5802$	$.0^3 5606$
2.9	$.0^3 5417$	$.0^3 5233$	$.0^3 5055$	$.0^3 4883$	$.0^3 4716$	$.0^3 4555$	$.0^3 4398$	$.0^3 4247$	$.0^3 4101$	$.0^3 3959$
3.0	$.0^3 3822$	$.0^3 3689$	$.0^3 3560$	$.0^3 3436$	$.0^3 3316$	$.0^3 3199$	$.0^3 3087$	$.0^3 2078$	$.0^3 2873$	$.0^3 2771$
3.1	$.0^3 2673$	$.0^3 2577$	$.0^3 2485$	$.0^3 2396$	$.0^3 2311$	$.0^3 2227$	$.0^3 2147$	$.0^3 2070$	$.0^3 1995$	$.0^3 1922$
3.2	$.0^3 1852$	$.0^3 1785$	$.0^3 1720$	$.0^3 1657$	$.0^3 1596$	$.0^3 1537$	$.0^3 1480$	$.0^3 1426$	$.0^3 1373$	$.0^3 1322$
3.3	$.0^3 1273$	$.0^3 1225$	$.0^3 1179$	$.0^3 1135$	$.0^3 1093$	$.0^3 1051$	$.0^3 1012$	$.0^4 9734$	$.0^4 9365$	$.0^4 9009$
3.4	$.0^4 8666$	$.0^4 8335$	$.0^4 8016$	$.0^4 7709$	$.0^4 7413$	$.0^4 7127$	$.0^4 6852$	$.0^4 6587$	$.0^4 6331$	$.0^4 6085$
3.5	$.0^4 5848$	$.0^4 5620$	$.0^4 5400$	$.0^4 5188$	$.0^4 4984$	$.0^4 4788$	$.0^4 4599$	$.0^4 4417$	$.0^4 4242$	$.0^4 4073$
3.6	$.0^4 3911$	$.0^4 3755$	$.0^4 3605$	$.0^4 3460$	$.0^4 3321$	$.0^4 3188$	$.0^4 3059$	$.0^4 2935$	$.0^4 2816$	$.0^4 2702$
3.7	$.0^4 2592$	$.0^4 2486$	$.0^4 2385$	$.0^4 2287$	$.0^4 2193$	$.0^4 2103$	$.0^4 2016$	$.0^4 1933$	$.0^4 1853$	$.0^4 1776$
3.8	$.0^4 1702$	$.0^4 1632$	$.0^4 1563$	$.0^4 1498$	$.0^4 1435$	$.0^4 1375$	$.0^4 1317$	$.0^4 1262$	$.0^4 1208$	$.0^4 1157$
3.9	$.0^4 1108$	$.0^4 1061$	$.0^4 1016$	$.0^5 9723$	$.0^5 9307$	$.0^5 8908$	$.0^5 8525$	$.0^5 8158$	$.0^5 7806$	$.0^5 7469$
4.0	$.0^5 7145$	$.0^5 6835$	$.0^5 6538$	$.0^5 6253$	$.0^5 5980$	$.0^5 5718$	$.0^5 5468$	$.0^5 5227$	$.0^5 4997$	$.0^5 4777$
4.1	$.0^5 4566$	$.0^5 4364$	$.0^5 4170$	$.0^5 3985$	$.0^5 3807$	$.0^5 3637$	$.0^5 3475$	$.0^5 3319$	$.0^5 3170$	$.0^5 3027$
4.2	$.0^5 2891$	$.0^5 2760$	$.0^5 2635$	$.0^5 2516$	$.0^5 2402$	$.0^5 2292$	$.0^5 2188$	$.0^5 2088$	$.0^5 1992$	$.0^5 1901$
4.3	$.0^5 1814$	$.0^5 1730$	$.0^5 1650$	$.0^5 1574$	$.0^5 1501$	$.0^5 1431$	$.0^5 1365$	$.0^5 1301$	$.0^5 1241$	$.0^5 1183$
4.4	$.0^5 1127$	$.0^5 1074$	$.0^5 1024$	$.0^6 9756$	$.0^6 9296$	$.0^6 8857$	$.0^6 8437$	$.0^6 8037$	$.0^6 7655$	$.0^6 7290$
4.5	$.0^6 6942$	$.0^6 6610$	$.0^6 6294$	$.0^6 5992$	$.0^6 5704$	$.0^6 5429$	$.0^6 5167$	$.0^6 4917$	$.0^6 4679$	$.0^6 4452$
4.6	$.0^6 4236$	$.0^6 4029$	$.0^6 3833$	$.0^6 3645$	$.0^6 3467$	$.0^6 3297$	$.0^6 3135$	$.0^6 2981$	$.0^6 2834$	$.0^6 2694$
4.7	$.0^6 2560$	$.0^6 2433$	$.0^6 2313$	$.0^6 2197$	$.0^6 2088$	$.0^6 1984$	$.0^6 1884$	$.0^6 1790$	$.0^6 1700$	$.0^6 1615$
4.8	$.0^6 1533$	$.0^6 1456$	$.0^6 1382$	$.0^6 1312$	$.0^6 1246$	$.0^6 1182$	$.0^6 1122$	$.0^6 1065$	$.0^6 1011$	$.0^7 9588$
4.9	$.0^7 9096$	$.0^7 8629$	$.0^7 8185$	$.0^7 7763$	$.0^7 7362$	$.0^7 6982$	$.0^7 6620$	$.0^7 6276$	$.0^7 5950$	$.0^7 5640$

Example of table notation: $.0^4 5848 = .00005848$.

Source: Reproduced from Robert O. Schlaifer, ***Introduction to Statistics for Business Decisions***, published by McGraw-Hill Book Company, 1961, by permission of the copyright holder, the President and Fellows of Harvard College.



المـــــراجـــع

1- Aarvik, O, and Randolf, P. "The Application of Linear Programming to the Determination of Transmission Fees in an Electrical Power Network," *Interfaces* Vol .6, Nov. 1975.

2- Anderson, David and Sweeny, Dennis, and Williams, Thomas. *An Introduction To Management Science : Quantitative Approaches to Decision Making*, Boston , Mass.: West Publishing Co., 1976.

3- Balbirer, Sheldon D., and Shaw, David "An Application of Linear Programming to Bank Financial Planning" *Interfaces* Vol. 11 , No. 5, Oct. 1981 , pp. 77 –82.

4- Bennington,G.E "Applying Network Analysis," *Industrial Engineering* Vol.6, Jan. 1974, pp . 17-25.

5- Buffa, E, and Taubert, W. *Production- Inventory System: Planning and Control*, revised edition. Homewood , ILL. : Irwin , Inc., 1972.

6- Cooper, L, and Steinberg, D. *Introduction to Methods of Optimization*, Philadelphia , PA. : W.B Sanders Co. 1970.

7- Dantzig, G.B. " Linear Programming and Extensions," Princeton University Press, Princeton, N. J, 1963.

8- Das, CandraseKhar, " A Unified Approach to the Price Break Economic Order Quantity (EOQ) Problem," *Decision Sciences* Vol. 15 No. 3, pp. 350 – 358.

9- Edmond, E.D.,and Maggs, R.P "How Useful are Quene model in Port Investment Decision for Container Berths," *Journal of Operation Research Society* Vol . 29, No 8.

10- Feely,R.M, Criner, P. and Watt, B.K "Cholesterol Content of Foods," J .Am.Dietet. Assoc. 1972 , pp. 61, 134.

11- Foote, B.L, "Quening Case Study of Drive- In Banking" *Interfaces* Vol. 6, No.4, Aug. 1976.

12- Glassey, C. Roger, and Mizrah, Michael. "A Decision Support System for

Assigning Classes to Rooms," *Interfaces* Vol. 61, No. 5, Sept. – Oct. 1986, pp . 92 – 100.

13- Hilal, Said S., and Erikson, Warren . "Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming and the Production of Heart Valves," *Interfaces* Vol. 11 , No. 6, Dec. 1981 , pp . 48-56.

14- Hollorann, Thomas, and Byrn Judson "Untied Airlines Stationed Manpower Planning System" *Interfaces* Vol 61, No . 1, Jan., Feb. 1986, pp. 39-50.

15- Horowitz, J *Critical Path Scheduling*, N.Y, N.Y : The Ronal Press Co. 1967.

16- Ives, D "Decision Theory and the Practing Manager,"*Business Horizons* Vol. 16, No. 3, Jun.1973, pp. 38- 40.

17- Kramer , A, and Twigg, B.A. *Quality Control for The Food Industry*, 3rd edition. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., 1973.

18- Krogstad , J.L., Grudnitski, G., and Bryand, D.W. "PERTand Pert / Cost for Audit Planning and Control" Journal of Accountancy , Nov.1977.

19- McMillan , C., JR. *Mathematical Programming* , N. Y, N. Y: John Wiley & Sons, 1970.

20- Meador, C.,and Ness , D. " Descision Support Systems: An application to Corporate Planning" *Sloan Managment Review* Vol.15,No.2,1974, pp. 55- 68

21- Oliff, Michael , and Burch, Earl . " Multiproduct Production Scheduling at Owens – Corning Fiberglass," *Interfaces* No. 15, No. 5, Sept. – Oct. 1985, pp. 25-34.

22- Symonds, G.H. *Linear Programming: The Solution of Refinery Problems* , New York, N.Y : Esso Standard Oil Co., 1955.

23- Tucker, S.A. *The Break-Even System* : A Tool for *Profit Planning* , Englewood Cliffs, N.J : Prentice Hall, 1963.

24- Williams, P.W. " A Linear Programming Approach to Production Schedulings" *Production and Inventory Management* Vol.11, 3rd Quarter, 1970.

تحليل النظم وإدارة الأعمال

المحتـــويـــات

الصفحة

مـقدمـة 3

الباب الأول : البرمجة الخطية 5

- المخلوط الأمثل للمنتجات 7

- واستخدام أسلوب السمبلكس في حل المشاكل ذات الحدود القصوى.................. 10

- خطوات إجراء السمبلكس 15

- وحالات خاصة 25

- واستخدام أسلوب السمبلكس فى حل المشاكل ذات الحدود الدنيا.................. 29

- واضافة أنشطة أخرى 35

- وتقييد الأنشطة المضافة 39

- وتجزئة الأنشطة المركبة 46

الباب الثانى : تحليل الحساسية 57

- فى البرمجة الخطية 57

- الازدواجية فى البرمجة الخطية 63

الباب الثالث : تطبيقات البرمجة الخطية والمخلوط الأمثل للموارد........................ 69

- مشكلة المخلوط الغذائى.. 69

- مشكلة اضافة قيد على وزن المخلوط.. 81

- التوليفة الغذائية 84

الباب الرابع : التكلفة المثلى للنقل 93

- مشكلات النقل.. 93

- الشحن متعدد العبور.. 121

- التكليف بالمهام 126

- صفوف الانتظار.. 130

الباب الخامس : أ – نماذج شبكة العمل CPM, PERT 137

ب – PERT فى البحوث والتطبيقات التجارية 162

الباب الخامس

إدارة ومتابعة تنفيذ المشروعات

(محتوى تفصيلي)

نماذج شبكة العمل 137
- تمهـــيد 137
- إطار عمل PERT و CPM 137
- أساليب أخرى لشبكة العمل 138
- PERT 138
- رسم شبكة عمل PERT 140
- الجدولة الزمنية لأداء الأنشطة 141
- كيفية إيجاد المسار الحرج 142
- قاعدة حساب ES 144
- قاعدة حساب LF 145
- إحتمال إكتمال المشروع 147
- الأنشطة الصماء فى PERT 150
- تخطيط وجدولة تكاليف المشروع 151
- تكوين ميزانية أسبوعية 152
- متابعة ومراقبة تكاليف المشروع 154
- ذروة المشروع مع CPM 157
- ذروة المشروع مع البرمجة الخطية 158
- دالة الهدف 159
- قيود ذروة الوقت 159
- قيود إكتمال المشروع 159
- قيود تصف الشبكة 160
- مزايا وقصور PERT 161
- توصيات عامة عند إنشاء شبكات العمل 161

الباب السادس : نماذج مراقبة المستوى الكمى للمخزون 169
أولا – ذات الطلب المحدد 173
ثانياً – ذات حجم اللوط من الإنتاج الاقتصادى 181
ثالثاً – ذات القصور المخطط فى كمية المخزون 185
رابعاً – ذات استخدام رصيد الأمان 191
خامساً – ذات الخصومات النقدية 197
الباب السابع : مراقبة نوعية المخزون وإعداد ميزانيته 201
الباب الثامن : تطبيقات متقدمة فى البرامج الخطية 209
أ – المزج بين العديد من المنتجات 209
ب – دور رأس المال العامل فى مصفوفة البرنامج الخطى 213
جـ - تطبيقات تمويلية 217
د – تطبيقات تسويقية 220
هـ - تطبيقات إدارية 225
الباب التاسع: تحليل التعادل والتوزيع الطبيعى لاتخاذ القرار 241
- تمهيد 241
- تحليل التعادل والتوزيع الطبيعى 241
- التوزيع الإحتمالى للطلب 242
- إستخدام القيمة النقدية المتوقعة للناتج فى إتخاذ القرار 245
- EVPI كحد أعلى للإنفاق على المعلومات التسويقية 245
- دالة فرصة الخسارة 246
- فرصة الخسارة المتوقعة 246
التحليل الحدى - مع التوزيع غير المتصل 249
- مع التوزيع الطبيعي 251
- الملحق 255
المراجع 261

الكاتب فى سطور

هو من قدامى المغتربين فى الدنيا الجديدة والعائدين حديثا من المهجر . . تخرج من جامعة القاهرة 1958 والتحق بوزارة الاقتصاد والتجارة الخارجية ، وأثناءها حصل على درجة الماجستير ، ودبلوم معهد الدراسات الإحصائية والبحوث ، ودبلوم معهد التخطيط القومى ، أعقبها الهجرة وحصوله على درجة الدكتوراه فى الاقتصاد من جامعة ولاية المسيسبى الأمريكية . تدرج بعدها فى عضوية هيئة التدريس بالجامعة الأمريكية ببيروت ، وجامعة ولاية ماساشوتس الأمريكية (برنامج ماجستير إدارة الأعمال) ، ثم العمل خبيرا اقتصاديا فى منظمة الأغذية والزراعة للأمم المتحدة – روما، بالإضافة إلى نشاطه فى الشركات الأمريكية الكبرى ، وكمحاضر لبرامج تدريبية فى مصر فى مركز أراك التابع لدار المعارف ، القاهرة ، وبرنامج AOUDA بالخارجية المصرية.

وله كتب مترجمة بالمجلس الأعلى للثقافة وهى :

1- نحو مفهوم لاقتصاديات الموارد الطبيعية (عام 2004)

2- نحو مفهوم لاقتصاديات الصحة والرعاية الصحية والتأمين الصحى (المسار الامريكى) (2006)

وترجمات تحت الطبع:

1- نحو مفهوم للموارد المالية والاستثمار فى الأوراق المالية والتمويل الدولى

2- نحو مفهوم لإستراتيجيات التسويق

وترجمات أخرى ستصدر قريبا:

1- المفاهيم القانونية والمالية للتعاقد على شراء حقوق الامتياز التجارى (الفرانشايز)

2- الوصايا الصحية لقلبك والعلاقة الحميمة الزوجية

ومن المؤلفات :

1- كيف تقيم صرح فريق عمل (فالنجاح هو اختيار)*

2- المشروعات الصغيرة (مفهوم تطبيقى) انشاء وتمويل البزنس ، كيفية تسويق سلعتك الجديدة ، وكيفية اتخاذ القرار

3- المعايير الاقتصادية للمشكلات البيئية (ترجمة)

4- الاداء المتصاعد لكى تصبح عضوا منتدبا ناجحا

5- ماذا تعرف عن الاستثمار فى الأوراق المالية والبورصات والمشتقات

6- المبادىء الاساسية للاستثمار العقارى وتأمين المخاطر وإعادة التمويل فى ظل الاقتصاد الحر

7- مفاهيم أساسية لقراءة التقرير السنوى لنشاط شركة ومتطلبات هيئة سوق المال (المسار الامريكى)

8- الإدارة المالية لموارد واستخدامات الارصدة للمديرين الإداريين غير الماليين

